GUÍA DE ESTUDIO DE MATEMÁTICA

MÓDULO MATEMÁTICA

Esta guía es un material de apoyo al estudio para el Programa de Virtualización de la Educación Superior (VES)

VES- UNaM

"Las Matemáticas tienen belleza y romance. El mundo de las Matemáticas no es un lugar aburrido en el que estar. Es un lugar extraordinario; merece la pena estar allí".

-Marcus Peter Francis du Sautoy -

Estimada/do estudiante:

¡¡¡BIENVENIDA/DO A NUESTRA UNIVERSIDAD NACIONAL DE MISIONES!!!

Esta guía de estudio tiene como propósito acompañarles en el estudio de Matemática y fue elaborada para que **recuperes, afiances y resignifiques los conocimientos matemáticos que aprendiste en la escuela secundaria**.

Consideramos que los contenidos que encontrarán en este material son contenidos prioritarios de Matemáticas (contenidos básicos); necesarios para estar en mejores condiciones para afrontar tu formación en el primer año de una carrera universitaria.

Para ayudarles a estudiar de una manera autónoma, es necesario que desde el comienzo del curso se comprometan con las actividades de aprendizaje, poniendo en práctica las siguientes recomendaciones:

- ✓ Ante un ejercicio, un problema, una definición, o el enunciado de una propiedad hagan el esfuerzo por comprender; **NO piensen que no van a poder**, o que no van a entender.
- ✓ Para resolver las distintas situaciones matemáticas, **háganlo a partir de razonar, No memorizar**. El memorizar y el razonar implican actividades mentales distintas. En la resolución de un problema, utilizar sólo la memoria conlleva a una acción mecánica y eso obstaculiza un buen aprendizaje significativo de las Matemáticas.
- ✓ **La Matemática que queremos que aprendan no se aprende sólo escuchando explicaciones**. Cuando alguien nos explica, nos cuenta cuáles son las relaciones que él ha conseguido establecer; pero eso no garantiza que nosotros también las establezcamos, aunque tengamos la ilusión de que sí. Así que, NO esperen que las soluciones o la teoría les lleguen del profesor de la Facultad o de un profesor particular.
- ✓ **Trabajen tanto como sea posible en grupo**. El análisis y la discusión de las situaciones matemáticas entre pares les permitirá compartir diferentes maneras de pensar y razonar, como también identificar diversos procedimientos de resolución; lo cual redundará positivamente en su aprendizaje matemático.

“Cuando nuestras actitudes superan nuestras habilidades, aún lo imposible se hace posible”.

-**John Maxwell**-

Luego de estas breves recomendaciones, les contamos que los contenidos de esta guía de estudio se han estructurado de la siguiente manera:

- Eje temático 1: Números (en este bloque se incluye la operación Logaritmación).
- Eje temático 2: Ecuaciones lineales,
- Eje temático 3: Polinomios y Factorización de polinomios
- Eje temático 4: Funciones Polinómicas de Primer y Segundo Grado.
- Eje temático 5: Sistemas de ecuaciones lineales.
- Eje temático 6: Trigonometría.

Por último, señalamos que durante el desarrollo del curso les plantearemos los ejes temáticos desde una propuesta de enseñanza que promueve la integración de los mismos, teniendo en cuenta que una de las cualidades a la que debe gran parte de su belleza esta ciencia, es su estructura coherente y sistematizadora.

Y AHORA… ¡¡¡A ENTRAR EN ACCIÓN!!!

Los Profesores del Módulo de Matemática de VES

"Cuando nuestras actitudes superan nuestras habilidades, aún lo imposible se hace posible".

-John Maxwell-

LOS NÚMEROS

La noción de número es antigua como el hombre mismo. Las tribus más primitivas, tanto en tiempos pasados como en la actualidad, disponían de símbolos para contar; pero hasta la edad de bronce no aparecieron sistemas de numeración para manejar números grandes y realizar operaciones entre ellos. El hallazgo de sistemas de numeración está profundamente unido al progreso matemático y cultural de los pueblos.

En la actualidad sigue siendo muy importante conocer los distintos tipos de números, como también dominar las operaciones que se pueden realizar con ellos y sus propiedades, por las espléndidas aplicaciones en problemas técnicos de gran envergadura.

En este eje temático trabajamos con los números ya conocidos. El objetivo es actualizar los conocimientos de los números y sus operaciones. Presentamos una síntesis que abarca conceptos básicos relacionados con ellos. Además, proponemos actividades de aprendizaje para reconocer, ejercitar las operaciones y la aplicación de propiedades que se cumplen en ellas.

$$1 = 1^2$$
$$1 + 3 = 2^2$$
$$1 + 3 + 5 = 3^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2$$

$$1 = 1^3$$
$$3 + 5 = 2^3$$
$$7 + 9 + 11 = 3^3$$
$$13 + 15 + 17 + 19 = 4^3$$
$$21 + 23 + 25 + 27 + 29 = 5^3$$

Contenidos de este Capítulo:
Clasificación de los distintos tipos de números: números naturales (N_0), números enteros (Z), números racionales (Q) y números reales (R). Propiedades de N_0, Z, Q y R. Interpretación de los números en la recta numérica. El orden en N_0, Z, Q y R. Operaciones posibles en N_0, Z, Q y R. Propiedades de las operaciones. Problemas con números N_0, Z, Q y R. Logaritmación: definición y propiedades. Ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

Desde que eras niño has utilizado los números, ya sea para contar, para expresar cantidades y medidas. Primero conociste los números naturales y se te plantearon nuevos interrogantes que pudiste resolver en la medida que conocías otros números.

A continuación, haremos una breve revisión de conceptos teóricos sobre los distintos tipos de números que conoces hasta ahora.

I. NÚMEROS NATURALES

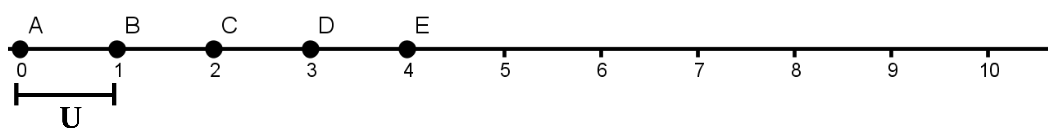
Los números naturales son: 1, 2, 3, 4...sirven para contar y para numerar. Para expresarlos se usa la letra **N**. En caso que se incluya al 0 se escribe $\mathbf{N_0}$.

Propiedades de $\mathbf{N_0}$

- ✓ Hay infinitos números naturales.
- ✓ El primer número natural es cero. No hay último número natural.
- ✓ Todo número natural tiene un sucesor. Un número natural y su sucesor se dicen consecutivos. Ej.: 7 es el sucesor de 6.
- ✓ Todo número, excepto cero, tiene antecesor.
- ✓ Entre dos números naturales existe siempre un número finito de números naturales. Por eso decimos que **$\mathbf{N_0}$ es discreto**. Ej.: entre 5 y 9 existen 3 números naturales.
- ✓ $\mathbf{N_0}$ está totalmente ordenado por la relación menor o igual. Es decir, dados dos números naturales $a\ y\ b$, que en forma genérica llamamos a y b, se verifica necesariamente que: $a < b, a = b\ , a > b$.

Los $\mathbf{N_0}$ en la recta numérica

Como los $\mathbf{N_0}$ están ordenados los podemos representar en la recta numérica. Para representar los números en la recta numérica es necesario fijar un origen y un segmento unidad. De esta manera, a cada número natural le corresponde un punto y sólo uno, sobre la recta numérica.



Las Operaciones en $\mathbf{N_0}$

En Naturales se definen las operaciones de adición, multiplicación, potenciación y sus inversas.

La adición de números naturales es siempre un número natural. Enunciamos entonces en forma simbólica la **propiedad cerrada**.

$$\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{N}: \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{a\ y\ b\ se\ llaman\ sumandos}$$

∀: significa para todo
∈: significa pertenece

Ejemplos:

$$125\ y\ 30\ pertenecen\ a\ N_0: 125 + 30 = 155\ es\ un\ número\ natural.$$

$$965\ y\ 250\ pertenecen\ a\ N_0: 965 + 250 = 1215\ es\ un\ número\ natural.$$

Ahora bien, ¿la sustracción entre dos números naturales cumple la **propiedad cerrada**?

$$7\ y\ 2\ pertenecen\ a\ N_0;\ la\ resta\ 7 - 2 = 5;\ 5\ es\ un\ número\ natural.$$
$$4\ y\ 9\ pertenecen\ a\ N_0;\ la\ resta\ 4 - 9 = ?\ no\ es\ posible\ en\ N_0$$

La resta no siempre es posible en N_0

El resultado de restar dos números naturales no siempre es otro número Natural. Por ello, **la sustracción no es cerrada en N_0**.
Para dar solución a este problema fue necesario crear los números enteros.

II. NÚMEROS ENTEROS

Si consideramos el caso en que no pudimos resolver la resta cuando el minuendo es menor que el sustraendo nos permite reconocer que deben existir otros tipos de números que nos permitan resolver estas operaciones que exceden el campo de lo natural, del conjunto de los números naturales.

Podemos decir que con los números enteros se resuelve la imposibilidad de resolver una resta en **N_0**. Un ejemplo para presentar a los "nuevos números" ayudará a comprender mejor la situación:

El almacén de Doña María

Doña María, dueña de un almacén, es muy confiada. En el mostrador de su negocio hay un cartel que dice "HOY SE FÍA".

Si vas a comprar al almacén de doña María, te puede ocurrir que tu gasto sea menor, igual o superior al dinero que llevas. En el último caso, le quedas debiendo.

Veamos el cuaderno de anotaciones de doña María en el que aparece una tabla con los datos referidos al dinero que gastó cada cliente, el dinero que llevó para hacer las compras y la situación en que quedó cada uno de ellos.

	Gastó	**Llevó**	**Salió con**	**Quedó debiendo**
Juan	\$230	\$300	\$70	-
Silvia	\$460	\$500	\$40	-
Pedro	\$1000	\$900	-	\$100
Esther	\$456	\$500	\$44	-
Carla	\$900	\$1000	\$100	-
Jorge	\$2000	-		\$2000

La tabla nos informa que cuando Carla sale del almacén <u>tiene</u> \$100 mientras que Pedro <u>tiene una deuda</u> de \$100.

Es fácil pensar en un número que refleje la situación de Carla: el número natural 100. En cambio, el 100 no sirve para expresar la situación de Pedro, ya que no es lo mismo el <u>tener</u> de Carla que el <u>tener una deuda</u> de Pedro.

Esto nos permite pensar que los números con los que hemos trabajado hasta ahora –los números naturales –no alcanzan para reflejar todas las situaciones.

Para expresar la situación de Pedro vamos a usar el -100.

$$\boldsymbol{-100\ es\ lo\ que\ llamaremos\ a\ partir\ de\ ahora\ un\ número\ negativo}$$

Definición:

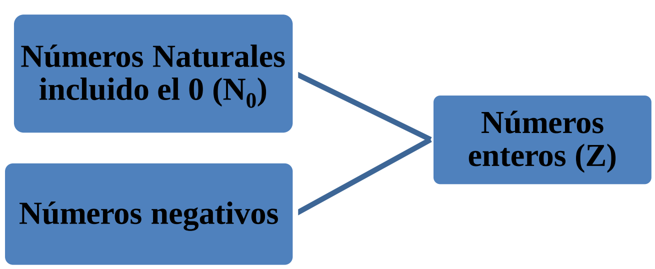
Se llama número entero a cualquiera de los números positivos (Naturales N), 1, 2, 3 o de los negativos – 1, - 2, - 3, etc. y al cero.

El conjunto de números enteros se indica con la letra **Z**.

$$Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Esto nos permite decir que los números naturales **N** (sin el elemento 0) pueden expresarse también con el símbolo $\mathbf{Z}^+$.

Por lo tanto, los números naturales incluido el cero y los números negativos, forman el conjunto de los números enteros (**Z**) . Entonces de esta manera nos queda el campo numérico:



Con lo visto hasta aquí podemos decir que el conjunto de los números enteros **es una ampliación** de los números de los Naturales.

Z es una ampliación de N_0

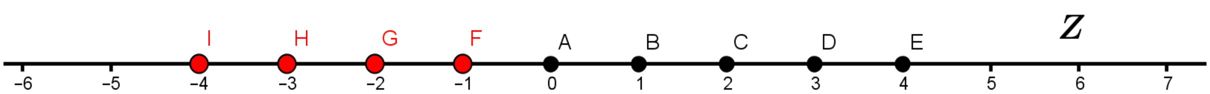
Propiedades de Z

- ✓ Hay infinitos números enteros.
- ✓ No tiene primero ni último elemento.
- ✓ Todo número entero tiene un sucesor y un antecesor. Un número entero y su sucesor o antecesor se dicen consecutivos. Ej.: -2 es el sucesor de -3 o también podemos decir que -3 es el antecesor de -2; -2 y -3 son consecutivos.
- ✓ Entre dos números enteros existe siempre un número finito de números enteros. Por ellos decimos que Z es discreto.
- ✓ **Z** está totalmente ordenado por la relación menor o igual. Es decir, dados dos números enteros, que en forma genérica llamamos a y b se verifica necesariamente que:

$$\text{Si } a, b \text{ son enteros entonces } a > b, a < b \text{ y } a = b.$$

Los Z en la recta numérica

Para representar los números enteros sobre la recta numérica fijamos el origen y el segmento unidad, como se hizo para representar en **N_0**. Luego se ubican los enteros positivos a la derecha de cero y los números negativos a la izquierda de cero.



De la misma manera que en **N_0** a cada número entero le corresponde un punto y sólo un punto en la recta numérica, pero no recíprocamente porque existen infinitos puntos en la recta que no representan ningún número entero. Es decir que los **Z** no completan la recta numérica.

Números enteros opuestos. Módulo o valor absoluto de un número entero

Observa en la recta que 3 está a la misma distancia del 0 que -3; es decir, **3 es el simétrico de – 3 respecto de 0.**

De la misma forma:

- **- 2 es el simétrico de 2 respecto de 0,**
- **4 es el simétrico de -4 respecto de 0, etcétera.**

Los números que son simétricos respecto de 0 se llaman **opuestos.**

- **El opuesto de un entero positivo es un entero negativo.**
- **El opuesto de un entero negativo es un entero positivo.**
- **Cero es el único entero que tiene por opuesto al mismo número.**

Llamamos **módulo o valor absoluto de un número entero a** a la distancia de ese número al cero.

De acuerdo con esta definición, el módulo de 4 es 4 y, el módulo de -4 también es 4. Para indicar que el módulo de -4 es 4, escribimos: $|-4| = 4$

Otros ejemplos:

$$|-8| = 8$$
$$|8| = 8$$
$$|30| = 30$$
$$|-30| = 30$$
$$|0| = 0$$

Las Operaciones en Z

- **Adición de números enteros.**
  La suma de dos números enteros es otro número entero. En forma simbólica:

$$\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{Z} : \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{Z} \quad , a \; y \; b \; se \; llaman \; sumandos$$

– **La suma de números enteros de mismo signo** es otro número entero tal que:
  - ✓ Su signo es igual al de los sumandos.
  - ✓ Su valor absoluto es la suma de los valores absolutos de los sumandos.

Ejemplos:

$$(+12) + (+42) = +54 \quad , \quad (-23) + (-5) = -28$$

– **La suma de números enteros de distinto signo**: La suma de dos números enteros de distinto signo es otro número entero tal que:
  - ✓ su signo es igual al del número de mayor valor absoluto.
  - ✓ su valor absoluto es la diferencia de los valores absolutos de los sumandos.

$$(-5) + (+4) = -1 \, , \qquad es \; negativo \; porque \; |-5| > |4|$$

$$(-56) + (+80) = 24 \, , \quad es \; positivo \; porque \; |80| > |56|$$

- **Caso particular:** la suma de dos números enteros opuestos es cero.

$$(-2) + (+2) = 0 \qquad\qquad (+5) + (-5) = 0$$

La adición de números enteros cumple las siguientes propiedades:

✓ *Propiedad asociativa*: en la adición de enteros, la suma no cambia si se sacan los paréntesis de asociación, se los pone o se los cambia de lugar.
En forma simbólica: $a, b, c \in Z: a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)$

Ejemplo:

$$(-5+7)+(-5) = -5+[7+(-5)] = -3$$

- ✓ *Propiedad conmutativa*: en la adición de enteros, la suma no cambia si se cambia el orden de los sumandos.
  En forma simbólica: $a, b, \in Z$: $a+b=b+a$
  Ejemplo:
  $$(+3)+(-5) = (-5)+(+3) = -2$$

- ✓ *Propiedad del elemento neutro*: en la adición de enteros hay un elemento que sumado a cualquiera de los otros no lo modifica. Es el cero.
  En forma simbólica: $a+0=0+a=0$
  Ejemplo:
  $$3+0=0+3=0$$

- ✓ *Propiedad del opuesto*. En la adición de enteros, cualquiera sea el número dado, siempre encontramos un entero, llamado *su opuesto*, que sumado a él da el elemento neutro.
  En forma simbólica: $Para\ a \in Z\ existe - a\ \in Z\,; a+(-a)=(-a)+a=0$
  Ejemplo:
  $$(+3)+(-3) = (-3)+(+3) = 0$$

- ✓ *Propiedad cerrada*: la suma de números enteros es un número entero.
  En forma simbólica: $a, b \in Z : a+b=c\ ,\ c \in Z$

- **Sustracción de números enteros**
  La resta entre dos números enteros es otro número entero, que se obtiene sumando al primero (minuendo) el opuesto del segundo (sustraendo) y se aplica la misma regla operatoria definida para la suma en Z.
  En forma simbólica: $a-b=a+(-b)$
  Ejemplos:
  $$(+9)-(-5) = (+9)+(+5) = 14$$
  $$(-15)-(+10) = (-15)+(-10) = -25$$

  Como la resta de números enteros se transforma en suma, resulta que:

  La sustracción en Z siempre es posible

  Por eso podemos anunciar la siguiente propiedad:

  - ✓ *Propiedad cerrada de la sustracción:* la resta de dos números enteros siempre es un número entero.
    En forma simbólica: $a, b \in Z : a-b=c\ ,\ c \in Z$

- **Multiplicación de números enteros**

La multiplicación entre dos números enteros es otro número entero, que se obtiene de calcular el producto entre los factores que componen la multiplicación.

El producto de dos números enteros es:

– positivo, si ambos factores son de igual signo.

$$3.5 = 15 \quad (-4).(-5) = 20$$

– negativo, si los factores son de distinto signo.

$$(-9).5 = -45 \qquad 7.(-4) = -28$$

– cero, si uno de los factores es cero,

$$0.4 = 0 \qquad (-5).0 = 0$$

En símbolos:

$$a, b \in Z^+ : a.b \in Z^+$$

$$a, b \in Z^- : a.b \in Z^+$$

$$a \in Z^+, b \in Z^- : a.b \in Z^-$$

$$a = 0 \quad b \in Z \quad a.b = 0$$

- **División de números enteros**

Dados dos números enteros a y b, con $b \neq 0$, decimos que $a \div b$ es el entero c, siempre que c multiplicado por b sea igual a a.

En forma simbólica: $a \div b = c \quad si \quad c \in Z \quad$ y $\quad c\,.\,b = a$,

a se llama dividendo, b divisor y c cociente.

– Si el dividendo y divisor tienen el mismo signo entonces el cociente es positivo.

$$45:5 = 9 \qquad 30:3 = 10 \qquad (-21):(-7) = 3$$

– Si el dividendo y divisor tienen diferente signo entonces el cociente es negativo.

$$(-6):3 = -2 \qquad 45:(-9) = -5$$

- **Potenciación de números enteros**

Le damos a la potenciación con exponente natural en Z, el mismo significado que en el conjunto de números naturales: **la potenciación es un producto reiterado**. Es la operación que permite escribir de manera abreviada una multiplicación de factores iguales.

$$\boldsymbol{Si\ a \in Z \ \ y \ \ n \in N \Longrightarrow a^n = \underbrace{a.a.a.a.a \dots a}_{\textbf{n veces}}}$$

Donde:

$\boldsymbol{a}$: Base de la potencia.

$\boldsymbol{n}$: Exponente natural que indica la cantidad de veces que la base se multiplica por sí misma.

Recordar

$$\boldsymbol{a^0 = 1 \ \ si\ a \neq 0}$$

$$\boldsymbol{a^1 = a}$$

En cuanto a la potenciación en Z, debemos considerar la siguiente regla de signos:

– Base positiva, exponente par o impar, potencia positiva

$$5^4 = 5.5.5.5 = 625 \quad 7^3 = 7.7.7 = 343$$

– Base negativa, exponente par, potencia positiva.

$$(-3)^4 = (-3).(-3).(-3).(-3) = 81 \quad (-6)^2 = (-6).(-6) = 36$$

– Base negativa, exponente impar, potencia negativa.

$$(-5)^3 = (-5).(-5).(-5) = -125 \quad (-2)^5 = (-2).(-2).(-2).(-2).(-2) = -32$$

- **Algunas propiedades de la potenciación de números enteros.**

- **Ley distributiva**: la potenciación es distributiva respecto a la multiplicación y a la división entre números enteros, siempre que las operaciones sean posibles.
  En forma simbólica:

$$(\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b})^{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}}.\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{n}} \qquad (\boldsymbol{a}:\boldsymbol{b})^{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}}:\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{n}}$$

Ejemplos:

$[4.5.(-2)]^3 = 4^3.5^3.(-2)^3 = 64.125.(-8) = -64000$

$(42:6)^2 = 42^2:6^2 = 1764:36 = 49$

Recuerden

$\forall a \; y \; b \; \neq 0$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{\boldsymbol{n}} \neq \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}}+\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{n}} \qquad (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^{\boldsymbol{n}} \neq \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}}-\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{n}}$$

- **Producto de potencias de igual base**: el producto entre dos potencias cuyas bases son iguales, es igual a otra potencia de igual base cuyo exponente es la suma de los exponentes de las potencias dadas.
  En forma simbólica: $\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{m}}.\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}}$

Ejemplos:

$4^5.4^2.4^0.4^7 = 4^{5+2+0+7} = 4^{14} = 268435456$

$(-2)^4.(-2)^5.(-2)^2 = (-2)^{4+5+2} = (-2)^{11} = 2048$

– **Cociente de potencias de igual base**: el cociente de potencias de igual base, es igual a otra potencia de la misma base cuyo exponente es la diferencia entre los exponentes de las potencias del dividendo y divisor

En forma simbólica: $\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{m}}:\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}}$ **,** siendo $\boldsymbol{m} \geq \boldsymbol{n}$

Ejemplos:

$5^8:5^3 = 5^{8-3} = 5^5 = 3125$

$(-6)^{12}:(-6)^4:(-6)^5 = (-6)^{12-4-5} = (-6)^3 = -216$

–**Potencia de potencia**: la potencia de otra potencia es igual a otra potencia de igual base con cuyo exponente es el producto de los exponentes de la potencia dada.

En forma simbólica: $(a^m)^n = a^{m.n}$

Ejemplo:

$[(-3)^4]^2 = (-3)^{4.2} = (-3)^8 = 6561$

- **Radicación en Z**
  Llamamos raíz enésima de un número a a un número b, si existe, que al ser elevado a la enésima potencia es igual a a.

$$\sqrt[n]{a} = b \; porque \; b^n = a \quad ; \quad a \in Z \;, n \in N \; y \; n > 1$$

Donde:
a: radicando.
n:índice.
b: raíz.

Regla de signos de la radicación.

– Si el índice es impar, **la raíz entera es única** y del mismo signo del radicando.
Ejemplos:

$$\sqrt[5]{32} = 2 \; porque \; 2^5 = 32$$
$$\sqrt[3]{125} = 5 \; porque \; 5^3 = 125$$
$$\sqrt[3]{-216} = -6 \; porque \; (-6)^3 = -216$$
$$\sqrt[5]{-32} = -2 \; porque \; (-2)^5 = -3$$

– Si el índice es par y el radicando es positivo **existen dos raíces enteras opuestas.**
Ejemplos:

$$\sqrt{16} = 4 \; \rightarrow 4^2 = 16 \quad y \quad \sqrt{16} = -4 \rightarrow (-4)^2 = 16$$
$$\sqrt[4]{81} = 3 \rightarrow 3^4 = 8 \quad y \quad \sqrt[4]{81} = -3 \rightarrow (-3)^4 = 81$$

Para indicar ambas raíces se expresa:

$$\sqrt{16} = \pm 4 \qquad\qquad \sqrt[4]{81} = \pm 3$$

La raíz positiva se llama **raíz aritmética**. En estos ejemplos +4 es la raíz aritmética de $\sqrt{16}$ y +3 es la raíz aritmética de $\sqrt[4]{81}$

– Si el índice es par y el radicando es negativo, no existe solución en el conjunto Z.
Ejemplo.
$\sqrt{-9}$ no es posible en Z porque ningún número entero elevado a un exponente par da por resultado un número negativo.

Esta situación indica que la **radicación no es cerrada en Z**.

Otra propiedad de la radicación

- *Propiedad distributiva*: la radicación es distributiva respecto a la multiplicación y a la división., siempre que las operaciones sean posibles.
  En forma simbólica: $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} \quad o \; bien \; \sqrt[n]{a:b} = \sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}$

Ejemplos:
$\sqrt[3]{(-27).8} = \sqrt[3]{-27}.\sqrt[3]{8} = (-3).2 = -6$
$\sqrt{16:4} = \sqrt{16}:\sqrt{4} = 4:2 = 2$
Observación: considero en este caso la raíz positiva porque el producto de igual manera será positiva.

Recuerden

$\forall a \text{ y } b \neq 0$

$$\sqrt[n]{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}} \neq \sqrt[n]{\boldsymbol{a}}+\sqrt[n]{\boldsymbol{b}} \quad ; \quad \sqrt[n]{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}} \neq \sqrt[n]{\boldsymbol{a}}-\sqrt[n]{\boldsymbol{b}}$$

La necesidad de seguir creando nuevos números

Ahora bien, con la definición de la división en Z quedó claro que esta operación es posible en Z si y sólo si el dividendo es múltiplo del divisor. Es decir, si la división es exacta (porque el resto es cero).
Veamos:

8 y 4 son números enteros; la división $8 \div 4 = 2$, 2 es un número entero

Pero, ¿qué ocurre si no se cumple esta condición?
Por ejemplo 7 y 3 son números enteros; la división $7 \div 3 = ?$ no es posible en **Z**

La división no siempre es posible en Z

Para resolver esta imposibilidad se crearon los números racionales.

III. NÚMEROS RACIONALES

Para resolver los casos de imposibilidad de la división en **Z**, se crearon los números racionales que se expresan con la letra **Q**.
Entonces:

- ✓ En Z**:** $3 \div 4$ no es posible
- ✓ En Q: $3 \div 4 = \frac{3}{4} = 0{,}75$ (decimal exacto)

$$2 \div 11 = \frac{2}{11} = 0{,}181818\ldots.\text{(decimal periódica)}$$

Es decir que aparecen números que tienen la forma $\frac{a}{b}$; siendo a y b $(b \neq 0)$ números enteros.

$$\frac{\mathbf{a} \rightarrow \quad \textbf{numerador}}{\mathbf{b} \rightarrow \textbf{denominador}}$$

Estos nuevos números expresan porciones de unidad y se llaman ***números fraccionarios***.

Son números fraccionarios $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{5}{9}$, todos ellos son fracciones de la unidad en el que el denominador es mayor que el numerador. Por ello, son menores a la unidad.

También son números fraccionarios $\frac{11}{2}$; $\frac{20}{3}$; $\frac{13}{5}$, aunque cada uno de ellos equivalga a unidades completas más una fracción de unidad porque el numerador es mayor que el denominador.

$$\frac{11}{2} = \frac{10}{2} + \frac{1}{2} = 5 + \frac{1}{2} = 5\frac{1}{2}$$

$\frac{10}{2}$ es $10 \div 2 = 5$

$5\frac{1}{2}$ es **número mixto** o **fracción mixta** y está compuesto de una parte entera y otra fraccionaria

Regla práctica para pasar una fracción a número mixto

1. Se divide numerador por denominador
2. El cociente es el entero del número mixto
3. El resto es el numerador de la fracción
4. El denominador es el mismo de la fracción dada

$$\begin{array}{r|l} \mathbf{13} & \mathbf{5} \\ \hline \mathbf{3} & \mathbf{2} \end{array} \qquad \mathbf{\frac{13}{5} = 2\,\frac{3}{5}}$$

Más ejemplos: $\frac{20}{3} = \frac{18}{3} + \frac{2}{3} = 6 + \frac{2}{3} = 6\frac{2}{3}$

$$\frac{13}{5} = \frac{10}{5} + \frac{3}{5} = 2 + \frac{3}{5} = 2\frac{3}{5}$$

Los números fraccionarios pueden ser negativos: $-\frac{4}{5}$; $-\frac{8}{3}$; $-\frac{7}{10}$; $-\frac{17}{8}$; $-\frac{23}{10}$. Si es negativo, por ejemplo $-\frac{4}{5}$, teniendo en cuenta que los **Q** pueden pensarse como una división de dos números enteros, puede pensarse a $-\frac{4}{5}$ cómo $\frac{-4}{5}$ o $\frac{4}{-5}$. Es decir, el numerador negativo o el denominador negativo. Pero recuerda que generalmente es conveniente que el denominador sea positivo.

Por último, además es fácil darse cuenta que si en un número fraccionario el numerador es múltiplo del denominador éste es equivalente a un número entero pero que está "disfrazado" de número fraccionario. Ejemplos: $\frac{8}{4} = 2$; $\frac{27}{3} = 9$; $\frac{5}{5} = 1$; $\frac{0}{16} = 0$

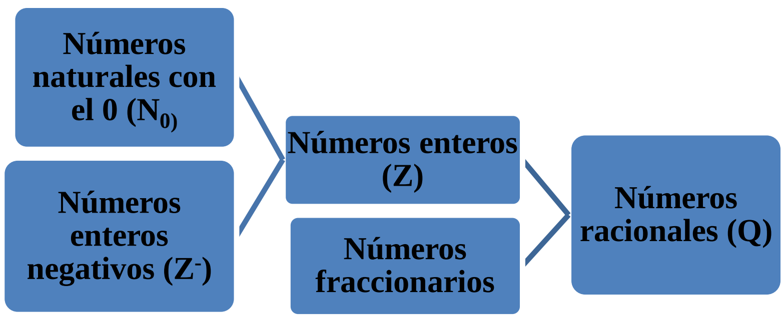
Lo visto hasta aquí permite expresar las siguientes definiciones:

Llamamos fracción a un cociente de números enteros. Todo número que puede ser expresado mediante una fracción $\frac{a}{b}$, donde $b \neq 0$, es un número racional.

La noción de racional proviene de **ración** (parte de un todo)

Todo número entero se puede expresar como número fraccionario.

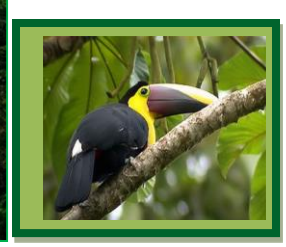
Por lo tanto, los números enteros y los números fraccionarios que no son equivalentes a un número entero forman los números racionales **Q**. Entonces de esta manera nos queda el campo numérico:



A continuación, se propone un ejemplo para comprender mejor estos “nuevos números”.

<u>Desapariciones anunciadas</u>

En la actualidad la gente ha tomado conciencia de la importancia de la vida silvestre y de su conservación para las generaciones futuras. Sin duda, el mayor reservorio de vida silvestre del planeta se halla sobre todo en las selvas, que ocupan el área cercana al Ecuador. Se distribuyen por América tropical, África central, Madagascar, Asia Sudoriental hasta nueva Guinea y el norte de Australia.



La selva del continente americano, tal vez la más castigada por la tala y los incendios, ocupa $\frac{5}{9}$ de la superficie total de selvas. Si bien, en número de especies vegetales, la selva americana y la asiática tienen niveles similares, hay una mayor diversidad de especies animales en la primera, y muchas de ellas corren peligro de extinguirse incluso antes de ser descubiertas.

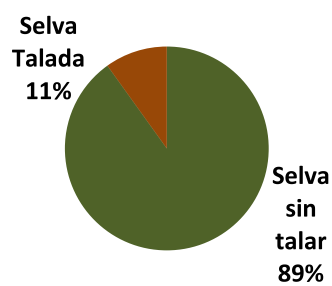
La acción del hombre está provocando una deforestación acelerada que aumenta año a año. Desde 1945, $\frac{2}{5}$ de la superficie total de las selvas del mundo han desaparecido y unos 100 000 km^2 desaparecen anualmente.

Podemos hacer un cálculo aproximado y confeccionar un gráfico circular, que muestre qué parte de la superficie total de selva americana se habrá arrasado, de aquí a diez años, si se mantiene constante promedio de tala anual a nivel mundial.

Selva americana en km^2 : 5 170 000 aprox.

Selva, en km^2, que será talada 568 700 aprox.

$$\frac{568\,700}{5\,170\,000} = 0{,}11$$



¿En cuántas décadas perderá la humanidad a la selva tropical si se mantiene constante el promedio de tala anual, en todo el mundo?

Hagamos algunas interpretaciones de este informe:

- Cuando decimos que la selva americana ocupa $\frac{5}{9}$ de la superficie total de selvas, estamos indicando que si dividimos en 9 partes iguales la superficie total de las selvas del mundo, 5 de esas partes la ocupa la selva americana. En este caso, estamos utilizando **la fracción como parte de un todo.**

- Si la superficie total de selvas en el mundo es de aproximadamente 9 300 000 km^2, podemos calcular los $\frac{5}{9}$ de ésta y hallar, así, la superficie de la selva americana. En este caso, **la fracción $\frac{5}{9}$ funciona como un operador 9 300 000**:

$$9\,300\,000\ km^2 \cdot \frac{5}{9} = 5\,170\,000\ km^2$$

- También **utilizamos fracciones para calcular porcentajes**; que aproximadamente el 11% de la selva americana se perderá en diez años significa que se talarán 11 km^2 de cada 100, en total 568 700 km^2 , de continuar el promedio actual de tala anual.

$$5\ 170\ 000 \text{ km}^2 \cdot \frac{\mathbf{11}}{\mathbf{100}} = 568\ 700 \text{ km}^2$$

- Que desde 1945 hayan desaparecido $\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}$ de la selva del mundo también se puede expresar diciendo que $\frac{4}{10}$ o $\frac{40}{100}$ o un 40% ha desaparecido.

Para dar a conocer este dato, que es sumamente alarmante, recurrimos a cualquier **fracción equivalente** a $\frac{2}{5}$, y generalmente utilizamos la fracción con denominador 100, es decir **centésimos** o el por ciento, lo cual nos permite visualizar con mayor claridad a qué parte nos referimos.

> **Dos fracciones, $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$ y $\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}$ son equivalentes si, y sólo si, $\mathbf{a.d = b.c}$**

Utilizando los datos del informe, se verifica, por ejemplo $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$; 2. 10 = 5.4.; o también $\frac{4}{10} = \frac{40}{100}$; 4.100 = 10.40

Las fracciones que tienen como denominador la unidad seguida de ceros se llaman fracciones decimales

> **Para hallar fracciones equivalentes a una fracción dada, multiplicamos (o dividimos, si la división es exacta) el numerador y el denominador por un mismo número distinto de cero.**

Nuevamente tomando los datos del informe: $\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}} = \frac{2.\ \mathbf{2}}{5.\ \mathbf{2}} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{10}} = \frac{4.\ \mathbf{10}}{10.\ \mathbf{10}} = \frac{\mathbf{40}}{\mathbf{100}}$

- Todos los datos que aparecen en este informe, por ejemplo $\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{9}}$; $\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}$; 0,11; 568 700, son números escritos de forma diferente: en forma de fracción (por ej. $\frac{5}{9}$), en forma decimal (por ej. 0,11), o como número entero (por ej. 568 700).

Se podrían escribir todos ellos de una misma forma, por ejemplo, de forma decimal y quedan:

❶ $\frac{5}{9} = 0{,}55555 \ldots\ldots = 0{,}\hat{5}$

❷ $\frac{2}{5} = 0{,}4$

❸ $\frac{11}{10} = 0{,}11$

$$❹\ \frac{568\,700}{1} = 568\,700{,}000\ldots\ldots = 568\,700,\hat{0}$$

Todo número racional tiene una expresión decimal, que puede ser exacta o periódica. Podemos hallar la expresión decimal de un número racional a partir de cualquier fracción que lo represente, dividiendo el numerador por el denominador correspondiente.

Las expresiones ❷ y ❸ tienen una cantidad de cifras decimales finitas: son expresiones decimales exactas.

Todo número racional que tiene una expresión decimal exacta puede expresarse como fracción decimal, es decir como una fracción cuyo denominador es una potencia de 10.

Otros ejemplos: $0{,}3 = \frac{3}{10}$; $3{,}25 = \frac{325}{100}$; $24{,}456 = \frac{24456}{1000}$

En la expresión ❶ el número 5 se repite indefinidamente porque al efectuar la división siempre obtenemos los mismos restos no nulos; ésta es una expresión decimal periódica.

Otros ejemplos: ❺ $0,\hat{5}$ ❻ $3,\widehat{26}$ ❼ $1{,}2\widehat{43}$

Las expresiones ❺ y ❻ son expresiones periódicas puras porque el período comienza inmediatamente después de la coma; los períodos son 5 y 26. La expresión ❼ es periódica mixta; tiene una parte no periódica (2) y otra periódica.
Estas expresiones periódicas no se pueden transformar en fracción decimal como ocurre con las expresiones decimales exactas.
No vamos a hacer la demostración del pasaje de una expresión decimal periódica a fracción, pero sí te recordamos las reglas:

Para obtener una fracción equivalente a un decimal periódico puro, escribimos como numerador el número dado sin coma menos la parte entera y, como denominador, tantos nueves como cifras decimales tenga la parte periódica.

Aplicando la regla en los ejemplos dados nos queda: ❺ $0,\hat{5} = \frac{05-0}{9} = \frac{5}{9}$

❻ $3,\widehat{26} = \frac{326-3}{99} = \frac{323}{99}$

Para obtener una fracción equivalente a un decimal periódico mixto, escribimos como numerador el número dado sin coma menos la parte entera seguida de la parte no periódica y, como denominador, tantos nueves como cifras tenga el período, seguidos por tantos ceros como cifras tenga la parte no periódica.

En la expresión ❼ $1{,}2\widehat{43} = \frac{1243-12}{990} = \frac{1231}{990}$

Llegada a esta instancia del desarrollo podemos expresar la siguiente síntesis sobre el concepto de números racionales.

Un **número racional** es un número que puede expresarse como un cociente de números enteros, con denominador no nulo.
El conjunto de todos los números racionales se representa con la letra **Q**. Simbólicamente:

$$\boldsymbol{Q = \left\{\frac{a}{b}\ ,\ \ a, b\ \in Z, b \neq 0\right\}}$$

Como todo número racional puede identificarse con una expresión decimal finita o con una expresión decimal infinita periódica, puede también definirse al conjunto **Q** como el conjunto de todas las expresiones decimales finitas o infinitas periódicas.

<u>Propiedades de Q</u>

- ✓ El conjunto de número racionales es infinito.
- ✓ No tiene primero ni último elemento.
- ✓ Entre dos números racionales existe siempre un número infinito de racionales. Por ello decimos que el conjunto de números racionales es **denso**.

Por ejemplo: Entre $\frac{2}{4}$ y $\frac{3}{4}$ podemos encontrar tantos racionales como se quiera. Basta convertir $\frac{2}{4}$ y $\frac{3}{4}$ en fracciones equivalentes de denominador mayor.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\boldsymbol{\frac{2}{4}} & & & & & & & & & & \boldsymbol{\frac{3}{4}} \\
\downarrow & & & & & & & & & & \downarrow \\
\frac{4}{8} & & & & & \frac{5}{8} & & & & & \frac{6}{8} \\
\downarrow & & & & & \downarrow & & & & & \downarrow \\
\frac{20}{40}, & \frac{21}{40}, & \frac{22}{40}, & \frac{23}{40}, & \frac{24}{40}, & \frac{25}{40}, & \frac{26}{40}, & \frac{27}{40}, & \frac{28}{40}, & \frac{29}{40}, & \frac{30}{40}
\end{array}$$

Y así sucesivamente podemos encontrar más fracciones comprendidas entre $\frac{2}{4}$ y $\frac{3}{4}$ a medida que aumenta el denominador.

En consecuencia:

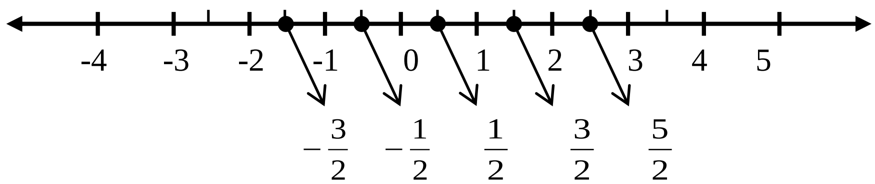
- ✓ Ningún número racional tiene sucesor ni antecesor.
- ✓ **Q** es totalmente ordenado por la relación $\leq$. Es decir, se cumple que : siendo a y b números racionales se verifica: a $< b$; $a = b$; $a > b$

Los Q en la recta numérica

Si sobre la recta numérica fijamos nuevamente un origen y un segmento unidad, a cada número racional corresponde uno y solo un punto sobre la recta numérica.

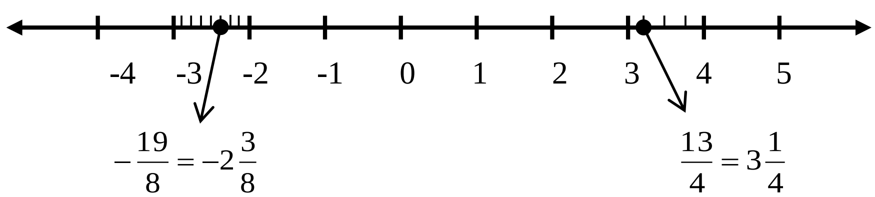
Recordemos además que el número racional $\frac{a}{b}$ se puede considerar como el cociente que se obtiene al dividir a por b; en donde b indica el número de partes en que se divide la unidad y a es el número de partes que se toman.

De esta manera, por ejemplo, si se divide en dos partes iguales cada segmento unidad en la recta numérica, podemos representar los números racionales cuya representación fraccionaria tiene como denominador 2, como se muestra en el ejemplo siguiente.



Muchas veces, si el número fraccionario tiene el numerador mayor que el denominador, es conveniente transformar el número fraccionario en forma de número mixto, para reconocer rápidamente entre qué números enteros está.

Otros ejemplos:



Generalizando el procedimiento descripto anteriormente se puede representar cualquier número racional en la recta numérica.

Las operaciones en Q

- **Adición de números racionales**

La suma dos o más números racionales es otro número racional. Podemos considerar el caso en que las fracciones tienen igual denominador o el caso en que tienen diferente denominador.

- Fracciones de igual denominador: para sumar racionales de igual denominador se obtiene sumando los numeradores y colocando el mismo denominador.

Ejemplos:

$$\frac{3}{2}+\frac{5}{2}-\frac{7}{2}=\frac{3+5-7}{2}=\frac{1}{2}$$

$$-\frac{8}{3}+\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=\frac{-8+2+4}{3}=-\frac{2}{3}$$

- Fracciones de distinto denominador: para sumar o restar fracciones de distintos denominadores, se busca un común denominador, es decir, un múltiplo común a todos los denominadores, luego ese denominador común se divide por cada uno de los denominadores, y el resultado se multiplica por el numerador, luego se suman o restan esos productos y escribimos el denominador común.

Ejemplos:

$$\frac{3}{5}+\frac{1}{4}+\frac{3}{2}=\frac{12+5+30}{\underbrace{20}_{\frac{12}{20}+\frac{5}{20}+\frac{30}{20}}}=\frac{47}{20} \quad ; \quad \frac{9}{4}+\frac{2}{3}=\frac{27+8}{\underbrace{12}_{\frac{27}{12}-\frac{8}{12}}}=\frac{35}{12}$$

En esta regla práctica para sumar fracciones de distintos denominadores se utiliza el concepto de fracciones equivalentes: dadas dos fracciones de distinto denominador siempre pueden conseguirse dos fracciones equivalentes a las dadas con el mismo denominador. Como debemos tratar de encontrar el denominador común menor de todos los denominadores, en lugar de multiplicar los denominadores calculamos el mínimo común múltiplo (m.c.m) de ellos.

En los ejemplos dados: m.c.m (2, 4, 5)=20 , m.c.m (3, 4)=12

Generalización de la suma de los racionales:

Si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son fracciones, se define la suma como:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a.d}{b.d}+\frac{c.b}{d.b}=\frac{a.d+c.b}{b.d}$$

Propiedades de la adición en Q: la adición en **Q** es cerrada, asociativa, conmutativa, tiene elemento neutro y cada elemento tiene su opuesto.

- **Sustracción de números racionales**

  Para restar dos números racionales, se suma al primero el opuesto del segundo.

  En forma simbólica: $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a}{b}+\left(-\frac{c}{d}\right)$

$$\frac{9}{4}-\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{9}{4}+\frac{2}{3}=\frac{9.3+2.4}{12}=\frac{27+8}{12}=\frac{35}{12}$$

- **Multiplicación de números racionales**

$$\boxed{\textbf{Definición: } \frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}=\frac{a.b}{b.c}}$$

Ejemplo:

$$\frac{5}{4}.\frac{7}{15} = \frac{5.7}{4.15} = \frac{35}{60} = \frac{7}{12}$$

Cuando sea posible, conviene simplificar antes de realizar la operación.
Ejemplo:

$$\frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{\underset{3}{\cancel{9}}}.\frac{\overset{7}{\cancel{21}}}{\underset{5}{\cancel{20}}} = \frac{1.7}{3.5} = \frac{7}{15}$$

Propiedades de la multiplicación en Q: la multiplicación en **Q** es cerrada, asociativa, conmutativa, tiene elemento neutro y elemento absorbente (el cero) .

- **División de números racionales**
  Dividir un número racional por otro distinto de cero es lo mismo que multiplicar el primero por el inverso multiplicativo del segundo.
  En forma simbólica:

$$\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in Q \ , \frac{c}{d} \neq 0$$

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}}}$$

Ejemplos:

$$\left(-\frac{2}{3}\right) : \frac{3}{5} = \left(-\frac{2}{3}\right).\frac{5}{3} = -\frac{10}{9}$$

$$\frac{6}{5} : \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{6}{5}.(-3) = -\frac{18}{5}$$

- **Potenciación de números racionales**
- **La potenciación con exponente natural** en **Q,** tiene el mismo significado que en **N** y en **Z**: es un producto reiterado.

$$\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b}.\frac{a}{b}.\dots\frac{a}{b}}_{\textbf{n veces}} = \frac{a^n}{b^n}} \qquad \mathbf{n} \in \mathbb{N}$$

Ejemplo:

$$\left(-\frac{3}{2}\right)^3 = \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{8}$$

También son válidas las definiciones para la potencia de exponente cero y de exponente 1.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1 \qquad\qquad \left(\frac{a}{b}\right)^1 = \frac{a}{b}$$

La **regla de los signos** es la misma que anunciamos para la potenciación de números enteros.

- **Potenciación con exponente entero negativo**

Toda potencia de exponente negativo se puede transformar en otra potencia tal que:

- ✓ La base es la inversa de la base de la potencia dada.
- ✓ el exponente es positivo y de igual valor absoluto que el exponente de la potencia dada.

En forma simbólica**:** $\boxed{\boldsymbol{a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n}}$

Ejemplos:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \qquad \left(-\frac{5}{3}\right)^{-3} = \left(-\frac{3}{5}\right)^3 \qquad 3^{-4} = \left(\frac{1}{3}\right)^4$$

- **Potenciación con exponente racional**

$$\boxed{\text{si } x \geq 0 \qquad \sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}}$$

Ejemplo:

$$\sqrt[3]{5^2} = 5^{\frac{2}{3}}$$

Observación: la potenciación con exponente racional no siempre da como resultado un número racional. Este problema de la potenciación de exponente racional queda resuelto con el conjunto numérico que veremos más adelante.

También se verifican las mismas propiedades que en los números naturales y enteros

- **Producto de potencias de igual base**

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n . \left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n+m}$$

- **División de potencias de igual base**

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n : \left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n-m}$$

- **Potencia de potencias**

$$\left[\left(\frac{a}{b}\right)^n\right]^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n.m}$$

- **Radicación en racionales**

La definición general de raíz enésima de números naturales sigue siendo válida para los racionales.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{x}{y} \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{a}{b}$$

La regla de los signos es la misma que hemos enunciado para la radicación de números enteros.

Ejemplos:

$$\sqrt{\frac{4}{25}} = \pm\frac{2}{5} \qquad porque \qquad \left(\pm\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$$

$$\sqrt[3]{-\frac{27}{343}} = -\frac{3}{7} \qquad porque \left(-\frac{3}{7}\right)^3 = -\frac{27}{343}$$

Regla práctica: Teniendo en cuenta que una fracción es un cociente indicado se puede aplicar la propiedad distributiva con respecto al cociente.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Ejemplo: $\sqrt[3]{-\frac{125}{8}} = \frac{\sqrt[3]{-125}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{-5}{2}$

La necesidad de seguir creando nuevos números

Entre las propiedades vistas en **Q,** se demostró que **Q** es denso, es decir entre dos números racionales siempre hay infinitos racionales más. ***¿Puedes asegurar, entonces, que los racionales completan la recta?* O sea: *¿a todo punto de la recta corresponde un número racional?*** Si te guías por la intuición dirías que sí. Pero ocurre, que también has visto que **el conjunto de los números racionales (Q) es el conjunto de los números decimales periódicos.**

Entonces te planteaste:
¿Existen números con infinitas cifras no periódicas?

¡¡¡Por supuesto que sí!!! Basta imaginar reglas para escribir sucesiones que nos aseguren que las cifras no se repiten periódicamente y escribir dichas sucesiones a partir de la coma.

Ejemplos:

- La sucesión de números naturales después de la coma: 0,1234567891011……….
- O la sucesión de los números pares: 0,2468101214………
- la sucesión de los números impares: 0,135791113……………

Podemos seguir dando más ejemplos porque hay infinitos números decimales de infinitas cifras no periódicas.

Los números de infinitas cifras decimales no periódicas se llaman **números irracionales.**

Hemos visto que todo número racional se puede expresar en forma de fracción, es evidente entonces que:

Los números irracionales no se pueden expresar en forma fraccionaria.

Con la aparición de estos números decimales de infinitas cifras no periódicas, que no son racionales, se origina un nuevo conjunto numérico, el de los números reales. A continuación nos ocupamos de ellos.

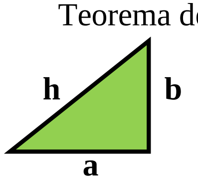
IV. NÚMEROS REALES

Hagamos un poco de historia sobre los números irracionales:

Estos números fueron descubiertos por los Pitagóricos, quienes demostraron que la raíz cuadrada de 2 no es un número racional. Por oposición llamaron **irracionales** a estos números.

El descubrimiento se originó al aplicar el **Teorema de Pitágoras** que establece que en todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa ("el lado de mayor longitud del triángulo rectángulo") es igual a la suma de los cuadrados de los catetos (los dos lados menores del triángulo, los que conforman el ángulo recto).

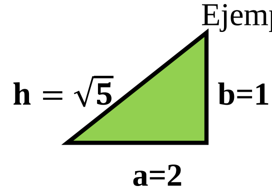
Teorema de Pitágoras



$$\mathbf{h}^2 = \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2$$

dad

Ejemplo



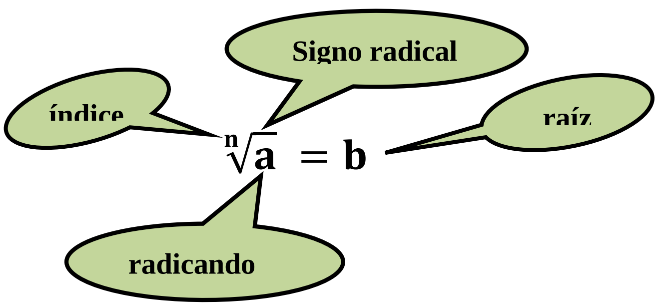
$$\mathbf{h}^2 = \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2$$
$$\mathbf{h}^2 = \mathbf{2}^2 + \mathbf{1}^2$$
$$\mathbf{h} = \sqrt{\mathbf{5}}$$

Si la raíz cuadrada de un número entero no es otro número entero, entonces es un número irracional.

Esta propiedad se generaliza a raíces de otros índices. Ejemplos:

Son números enteros	**No son números enteros** ↓ **Son números Irracionales**
$\sqrt{1}$ $\sqrt{9}$ $\sqrt{25}$ $\sqrt[3]{8}$ $\sqrt[4]{16}$ $\sqrt[3]{27}$	$\sqrt{2}$ $\sqrt{5}$ $\sqrt{7}$ $\sqrt[3]{4}$ $\sqrt[3]{9}$ $\sqrt[5]{13}$

En estos casos se expresan los números irracionales a través de radicales, cuyas partes se denominan:

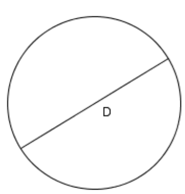


Además de los números irracionales provenientes de raíces, existen otros muy conocidos por sus aplicaciones. Van tres ejemplos:

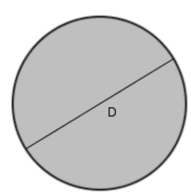
- El número π

Es posiblemente, el primer número irracional que se maneja concretamente, se emplea para calcular la longitud de la circunferencia o el área del círculo.

Su expresión decimal es 3,1415926535...., aunque en la práctica se usan valores aproximados como 3,14 o 3,1416.



Longitud = π . diámetro

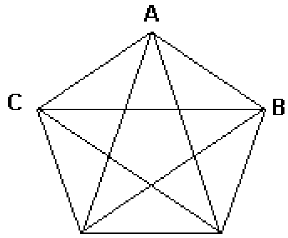


Área = π . radio^2

– **El número ∅**

Se llama así al número $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Los griegos pitagóricos (seguidores de Pitágoras) lo obtuvieron como relación entre la diagonal AC de un pentágono regular y su lado AB



$$\frac{AC}{AB} = \emptyset$$

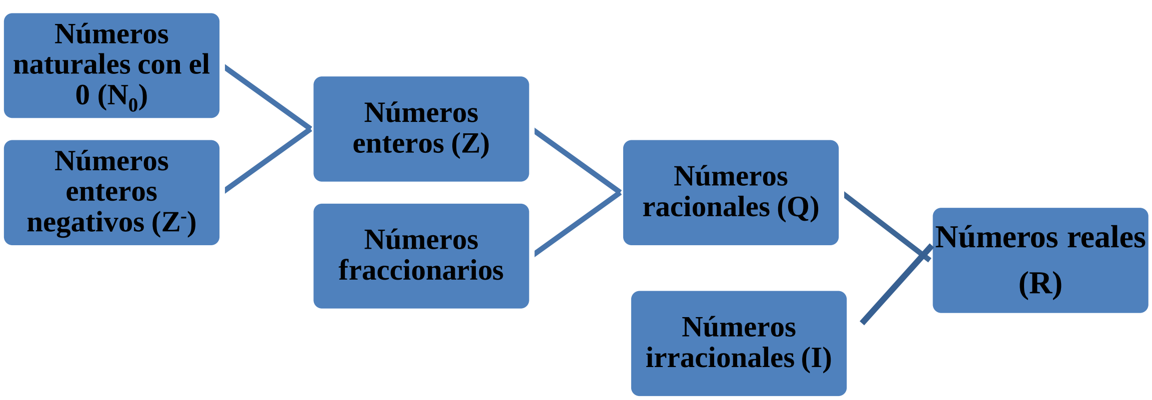
Cuando llegaron a la conclusión de que esta relación no se podía expresar como cociente de dos números enteros, esto pareció a los pitagóricos algo más allá de la razón humana, algo irracional; y precisamente esta es la palabra que se usó desde entonces para designar los números que sirven para expresar aquello que pareció inexpresable; además la palabra tiene también el sentido de número "que no es razón" de dos enteros.

Esta proporción de medida se ha usado con frecuencia en el arte.

- **El número e**

Es posiblemente, el número más importante en matemáticas superiores. Su valor decimal es 2,718281...

Los números racionales (**Q**) y los irracionales forman los números reales (**R**). Entonces el campo numérico se amplía y nos queda:



Propiedades de R

En **R** se cumplen todas las propiedades de **Q**.

- ✓ Es infinito
- ✓ No tiene primero ni último elemento
- ✓ Entre dos números reales existe siempre un número infinito de números reales. Por ello **R** es denso.
- ✓ Ningún número real tiene antecesor ni sucesor
- ✓ **R** es totalmente ordenado por la relación ≤

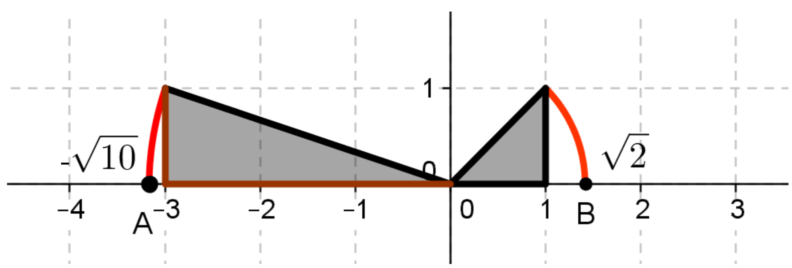
Los R en la recta numérica

Al estudiar los números racionales creíste que con ellos se completaba la recta. Pero luego descubriste que existen otros números, llamados **irracionales**, que también están representados en la recta. Entonces advertiste que con los racionales en la recta numérica quedan "agujeros" o "lagunas", es decir, hay puntos de la recta a los cuales no corresponde ningún número racional. Por tanto, la recta racional no está completa pues hay puntos a los cuales no corresponde ningún número racional

En cambio, el conjunto de los números reales formado por los racionales y los irracionales es **denso,** pero sin agujeros. Decimos que el conjunto de números reales es **continuo.** En consecuencia:

Los números reales **completan la recta numérica**. A todo número real corresponde un punto de la recta. A todo punto de la recta corresponde un número real.

Para representar en la recta real números irracionales expresados en forma radical con índice par, se puede utilizar el Teorema de Pitágoras. Ejemplos $-\sqrt{\mathbf{10}}\ \boldsymbol{y}\ \sqrt{\mathbf{2}}$

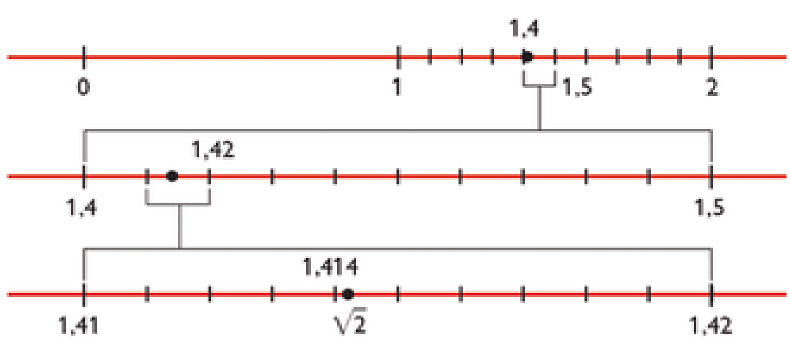


También se puede representar por aproximación, considerando intervalos numéricos en los que se encuentra el número irracional:

$1 < \sqrt{2} < 2$

$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$

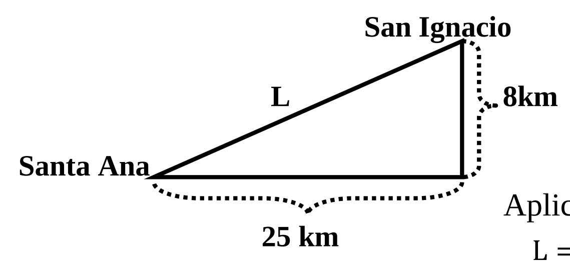
$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$



En caso que no fuera un radical con índice 2, por ejemplo $\sqrt[3]{7}$, se recurre a su expresión decimal $\sqrt[3]{7} = \mathbf{1,9129311827723892}$ ... ... .Para poder graficar este número irracional nos vemos en la necesidad de aproximar. Para comprender mejor, entonces primero recordaremos a través de un ejemplo cómo se aproximan números decimales y luego continuaremos con la representación de números reales en la recta numérica.

<u>Ejemplo</u>:

En una región se están asfaltando caminos que unirán dos localidades. Indiquen qué longitud tendrá uno de los caminos, de acuerdo con los datos del dibujo.



Aplicando el Teorema de Pitágoras, el valor de L:

$$L = \sqrt{25^2 + 8^2} \Rightarrow L = \sqrt{689}\text{km} \Rightarrow L \cong 26{,}25\text{km}$$

su expresión decimal es 26. 248809496813376.., y realizamos una aproximación para poder operar en la realidad.

Un número puede ser aproximado por truncamiento o por redondeo.

Para truncar un número decimal en una cifra determinada, se eliminan todas las cifras que le siguen y se las reemplaza por cero.

Ejemplos:

Truncamos los números a partir de los centésimos:

5,746 ≅ 5,74	10,43434343….≅ 10,43	1,41521356…..≅ 1,41

Para redondear un número decimal, debemos tener en cuenta lo siguiente: si la primera cifra para eliminar es menor que 5, se suprimen todas las cifras a partir de ella. En cambio, si la primera cifra para eliminar es mayor o igual que 5, sumamos 1 a la cifra anterior.

Ejemplos:

Redondeamos los números partir de los centésimos:

5,746 ≅ 5,75	10,43434343….≅ 10,43	1,41421356…..≅ 1,42

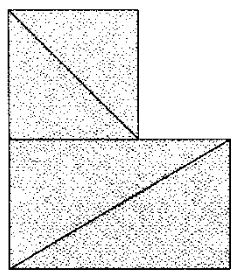
La aproximación más utilizada es por redondeo y, salvo indicación específica, es la que emplearemos.

Operaciones con radicales

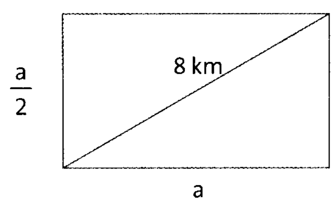
Cuando resolvemos cálculos en los que interviene algún radical, es imposible considerar su expresión decimal por tener infinitas cifras decimales no periódicas; por tanto, se utilizan las aproximaciones. Ahora veremos cómo operar con radicales, con el objetivo de que al aproximar valores, el error que cometamos sea el menor posible.

Situación problemática: Ayudemos a Tamara

Tamara quiere destinar una región de su campo, como la que muestra la figura de abajo, para el pastoreo del ganado. El terreno puede dividirse en un sector rectangular, en el cual el largo sea el doble del ancho y que tenga una diagonal de 8 km, y un sector cuadrado, cuya diagonal sea de 4 km.
Necesita pasto para sembrarlo y alambre para cercarlo. ¿Qué superficie de pasto debe sembrar Tamara? ¿Cuántos kilómetros de alambre utilizará en una vuelta de cerco?



Para resolver su problema, Tamara necesita saber el perímetro y el área del terreno. Analicemos primero cada figura por separado:



Por el Teorema de Pitágoras, es: $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 = 8^2 \Rightarrow \frac{a^2}{4} + a^2 = 64 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{5}{4}a^2 = 64 \Rightarrow a^2 = \frac{256}{5} \Rightarrow$ como a>0 (por ser el lado del rectángulo)

$$a = \sqrt{\frac{256}{5}} = \frac{16}{\sqrt{5}}$$

El largo y el ancho del rectángulo miden $\frac{16}{\sqrt{5}}$ km y $\frac{8}{\sqrt{5}}$ km, respectivamente la superficie del rectángulo mide, entonces:

$$\frac{16}{\sqrt{5}} \cdot \frac{8}{\sqrt{5}} = \frac{16\,.\,8}{\left(\sqrt{5}\right)^2} = \frac{128}{5} = 25{,}6\ km^2$$

Observemos que, si en lugar de operar con $\sqrt{5}$, hubiéramos tomado su aproximación, 2,23, el área nos hubiera dado (16: 2,23). (8 : 2,23) = 25,739508 que también es un valor aproximado, y no el valor real.

A medida que operamos con valores aproximados, sumando o multiplicando, el error es mayor; por lo tanto, es conveniente aproximar los valores sólo en el resultado y trabajar con raíces hasta el final.

Para seguir resolviendo este problema, es aconsejable que primero repasemos la radicación con números reales y algunas de sus propiedades.

- **Raíz n-ésima de un número real**

> Llamamos raíz n-ésima de un número real a, y lo simbolizamos $\sqrt[n]{a}$, a un número b definido de la siguiente forma:
>
> - Si n es par, a>0, $\sqrt[n]{a} = b \iff$ b > 0 y $b^n = a$
> - Si n es impar, $\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a$

Por convención, cuando n = 2 no se escribe el índice en el símbolo del radical, o sea que en lugar de $\sqrt[2]{a}$ se escribe $\sqrt{a}$.

- **Propiedades de la radicación**

Sean a > 0, b > 0, m, n $\in \mathbb{N}$, entonces:

a) $\boldsymbol{\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}}$

Probemos: $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{n}{n}} = a^1 = a \rightarrow \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

b) Propiedad Distributiva.

Si n es par y a y b son números positivos o cero o si n es impar y a y b toman cualquier valor se verifica que:

$$\boldsymbol{\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}} \quad ; \quad \boldsymbol{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}}$$

Probemos que $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}$

Para probar que $\left(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\right)^n = a\,b$, tomamos $\sqrt[n]{a} = A$ y $\sqrt[n]{b} = B$;
Entonces $A^n = a\ \ y\ \ B^n = b$; con lo cual:
$a\,b = A^n . B^n = (A\cdot B)^n = \left(\sqrt[n]{a}\,.\sqrt[n]{b}\right)^n$
Luego: $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}$

Para probar que $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, les queda de tarea hacer un análisis similar al anterior.

c) Si n es impar y a ∈ R; entonces $\sqrt[n]{\boldsymbol{a^n}} = \boldsymbol{a}$

d) Si n es par y a ∈ R; entonces $\sqrt[n]{\boldsymbol{a^n}} = |\boldsymbol{a}|$

Si n es par, $a^n > 0$; luego, podemos calcular su raíz n-ésima.

Si $a\ > 0\ \Rightarrow \sqrt[n]{a^n} = (a^n)^{\frac{1}{n}} = a^{n\frac{1}{n}} = a^1 = a$

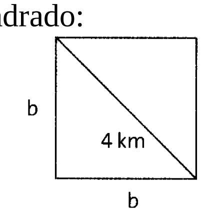
Si $a < 0\ \Rightarrow -a > 0\ y\ \ a^n = (-a)^n\ \ \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt[n]{a^n} = \sqrt[n]{(-a)^n} = [(= a)^n]^{\frac{1}{n}} = (-a)^{n\cdot\frac{1}{n}} = (-a)^1 = -a$

Luego $\sqrt[n]{\boldsymbol{a^n}} = \left\{\begin{matrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{si} & \boldsymbol{a \geq 0} \\ \boldsymbol{-a} & \boldsymbol{si} & \boldsymbol{a < 0} \end{matrix}\right\} = |\boldsymbol{a}|$

Luego de este repaso necesario, continuemos con el problema de Tamara.

Nos falta calcular las medidas del cuadrado:



Aplicando nuevamente el Teorema de Pitágoras:

$\dot{b}^2 + \dot{b}^2 = 4^2 \rightarrow 2b^2 = 16 \rightarrow b^2 = 8$

Dado que b> 0 (utilizando las propiedades anteriores).

$b = \sqrt{8} = \sqrt{2^3} = \sqrt{2^2\cdot 2} = \sqrt{2^2}\cdot\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

O sea que el lado mide $2\sqrt{2}$ Km.

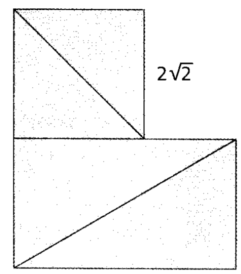
Luego, la superficie del cuadrado es:

$\left(2\sqrt{2}\right)^2 = 2^2\left(\sqrt{2}\right)^2 = 4.2 = 8\ km^2$

Para calcular la cantidad de pasto que debe sembrar Tamara, hay que sumar la superficie del rectángulo, que es 25,6 km^2, con la del cuadrado, que es 8 km^2:

25,6 + 8 = 33,6 km^2

Analicemos ahora el perímetro de la figura:



$$\frac{16}{\sqrt{5}} + 2\cdot\frac{8}{\sqrt{5}} + 3.2\sqrt{2} + \left(\frac{16}{\sqrt{5}} - 2\sqrt{2}\right) = \frac{16}{\sqrt{5}} + \frac{16}{\sqrt{5}} + 6\sqrt{2} + \frac{16}{\sqrt{5}} - 2\sqrt{2} =$$

$$= 3\,\frac{16}{\sqrt{5}} + (6-2)\sqrt{2} = \frac{48}{\sqrt{5}} + 4\sqrt{2}$$

La cantidad de alambre necesaria será, entonces: $\frac{48}{\sqrt{5}} + 4\sqrt{2}$ km

Si tuviéramos una calculadora que no fuera científica, o no tuviéramos una calculadora, sería más sencillo y menos aproximado realizar cuentas de suma y multiplicación con radicales que de división. Por este motivo, cuando no era común tener una calculadora, se trataba de que los radicales nunca quedaran en el denominador.
Observemos qué se puede hacer en este caso:

$$\frac{48}{\sqrt{5}} = \frac{48}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{48\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2} = \frac{48\sqrt{5}}{5} \text{ km}$$

Luego, la cantidad de alambre que debería comprar Tamara es:

$$\frac{48\sqrt{5}}{5} + 4\sqrt{2} \text{ km}$$

Aproximando el resultado y sabiendo que no puede comprar una fracción de metro, Tamara compra 27,124 km de alambre. Para la resolución de este problema, tuvimos que operar con radicales.

Definamos estas operaciones.

- **Suma y resta de radicales**

> ✓ Para sumar o restar dos términos que tienen como factor el mismo radical, extraemos como factor común el radical.
> ✓ Las sumas o restas con distintos radicales deben quedar expresadas.

Por ejemplo:

Calculemos: $\sqrt{2} + 6\sqrt{8} - 3\sqrt{32}$

Intentemos simplificar, para que nos quede la menor cantidad posible de radicales diferentes. Como $8 = 2^3 \quad y \quad 32 = 2^5$, entonces:

$\sqrt{2} + 6\sqrt{8} - 3\sqrt{32} =$

$=\sqrt{2} + 6\sqrt{2^3} - 3\sqrt{2^5} = \sqrt{2} + 6\sqrt{2^2 \cdot 2} - 3\sqrt{2^2 \,.\, 2^2 \cdot 2} =$

$= \sqrt{2} + 6\,\sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} - 3\,\sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2} + 6.2\sqrt{2} + 3.2.2.\sqrt{2}=$

$$= \sqrt{2} + 12\sqrt{2} - 12\sqrt{2} = (1 + 12 - 12)\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

Realicemos este otro cálculo

$\sqrt{5} - 3\sqrt{45} - \sqrt[3]{81} = \sqrt{5} - 3\sqrt{9\,.\,5} + \sqrt[3]{3^4} = \sqrt{5} - 3\,.\,3\,.\sqrt{5} + \sqrt[3]{3^3.3} =$

$=\sqrt{5} - 9\,\sqrt{5} + \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{3} = -8\,\sqrt{5} + 3\,\sqrt[3]{3}$

Observemos que para obtener un mismo radical, consideramos en el primer ejemplo $\sqrt{32} = 4.\sqrt{2}$, y en el segundo ejemplo $\sqrt[3]{81} = 3.\sqrt[3]{3}$. Esto se llama extraer factores fuera del signo radical.

- **Extracción fuera del signo radical**

Cuando las potencias del número que está dentro del signo radical son mayores o iguales al índice de la raíz, es posible extraer factores fuera del signo radical para facilitar los cálculos. Supongamos que queremos simplificar la expresión $\sqrt[m]{a^n}$ con n ∈ Z, m ∈ ℕ, n ≥ m y a > 0.

Como n y m son números enteros, al realizar la división de n por m, por el algoritmo de división, existen q, r ∈ Z, 0 ≤ r < m, tales que n = m . q + r ⇒

$$a^n = a^{m \cdot q + r} = a^{mq} \cdot a^r = (a^q)^m a^r$$

$$\sqrt[\mu]{a^n} = \sqrt[m]{(a^q)^m \cdot a^r} = \sqrt[m]{(a^q)^m} \,.\, \sqrt[m]{a^r} = a^q \cdot \sqrt[m]{a^r}$$

Por ejemplo:

$$\sqrt[3]{1296} = \sqrt[3]{81.16} = \sqrt[3]{81}\,.\,\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{3^4}\,.\,\sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{3^3.3} \cdot \sqrt[3]{2^3.2} = 3\,\sqrt[3]{3}.2.\sqrt[3]{2} = 6\sqrt[3]{6}$$

Observemos que para determinar qué factores se pueden extraer fuera del signo radical, es conveniente escribir al número como producto de potencias de números primos (en forma factorizada).

- **Producto de radicales**

Para poder multiplicar dos radicales con igual índice, utilizamos la propiedad:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b} \quad con\ a, b > 0$$

Por ejemplo: $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{64} = 4$

Si los radicales tienen distinto índice, tratamos de transformarlos en radicales equivalentes con igual índice, utilizando las propiedades de la radicación.

Veamos algunos ejemplos:

$$\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[7]{5} = \sqrt[4.7]{2^{1.7}} \,.\, \sqrt[7.4]{5^{1:4}} = \sqrt[28]{2^7} \,.\, \sqrt[28]{5^4} = \sqrt[28]{2^7 \cdot 5^4}$$

$$\sqrt[6]{3} \cdot \sqrt[8]{7} = \sqrt[6.4]{3^{1.4}} \cdot \sqrt[8.3]{7^{1:3}} = \sqrt[24]{3^4} \cdot \sqrt[24]{7^3} = \sqrt[24]{3^4 \cdot 7^3}$$

Si tenemos que multiplicar sumas y restas con radicales, utilizamos, además, la propiedad distributiva.

Por ejemplo:

$$\left(5 - \sqrt[4]{32}\right) \cdot \left(\sqrt{3} - \sqrt[4]{48}\right) = 5\sqrt{3} - \sqrt[4]{32}\,\sqrt{3} - 5\sqrt[4]{48} + \sqrt[4]{32}\,\sqrt[4]{48} =$$

$$= 5\sqrt{3} - \sqrt[4]{2^4 \cdot 2} \cdot \sqrt{3} - 5.\sqrt[4]{2^4 \cdot 3} + \sqrt[4]{32\,.\,48} =$$

$$= 5\sqrt{3} - 2\ \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt{3} - 5\,.\,2\ \sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{2^5.\,2^4.\,3} =$$

$$= 5\sqrt{3} - 2\ \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{3^2} - 10\ \sqrt[4]{3}\ + 2\,.\,2\ \sqrt[4]{2\,.3} =$$

$$= 5\sqrt{3} - 2\,.\,\sqrt[4]{18} - 10\ \sqrt[4]{3} + 4\sqrt[4]{6}$$

- **Racionalización de Radicales**

Como ya vimos anteriormente, para poder simplificar al máximo las expresiones, es conveniente dejar los radicales siempre en el numerador.

Cuando quitamos los radicales del numerador o del denominador de un fraccionario, decimos que estamos racionalizando. El procedimiento de racionalización implica la multiplicación del numerador y denominador de la fracción (que expresa la división) por un mismo número. Podemos encontrar varios casos.

Vemos uno de ellos: **el denominador es un radical único.**
Si en el denominador tenemos una raíz cuadrada, multiplicamos numerador y denominador por la misma raíz. Si a > 0:

$$\frac{b}{\sqrt{a}} = \frac{b}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{b\sqrt{a}}{\sqrt{a^2}} = \frac{b\sqrt{a}}{a}$$

Ejemplo

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}}}_{1} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Si la raíz es cúbica, multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt[3]{a^2}$

$$\frac{b}{\sqrt[3]{a}} = \frac{b}{\sqrt[3]{a}} \cdot \frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a^2}} = \frac{b\,\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a^3}} = \frac{b\,\sqrt[3]{a^2}}{a}$$

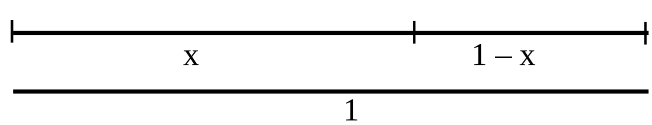
En general, debemos multiplicar y dividir para lograr que en el denominador desaparezca la raíz. 0 sea, para a > 0:

$$\frac{b}{\sqrt[n]{a}} = \frac{b}{\sqrt[n]{a}} \cdot \frac{\sqrt[n]{a^{n-1}}}{\sqrt[n]{a^{n-1}}} = \frac{b\,\sqrt[n]{a^{n-1}}}{\sqrt[n]{a^n}} = \frac{b\,\sqrt[n]{a^{n-1}}}{a}$$

Situación problemática : Un problema geométrico

Un segmento dividido en dos partes está dividido en forma armónica si la razón (división) entre el segmento menor y el mayor es la misma que la razón entre el segmento mayor y el total. Dado un segmento de longitud 1,
a. encuentren la manera de dividirlo en forma armónica.
b. Hallen la razón entre los segmentos resultantes.

Dibujemos un segmento de longitud 1 y divídamoslo en forma armónica.



$$\frac{1-x}{x} = \frac{x}{1} \;\Longrightarrow 1 - x = \; x^2 \;\;\Longrightarrow\;\; x^2 + x - 1 = 0$$

Utilizando la fórmula resolvente (y como x>0) $\Longrightarrow$ $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

El segmento queda dividido en dos partes, una de ellas mide

$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ y la otra $1-\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2}=\frac{2-(-1+\sqrt{5}\,)}{2}=\frac{3-\ \sqrt{5}}{2}$

Calculemos la razón (división) entre las partes que quedan. Obtenemos:

$$\frac{x}{1-x}=\frac{\frac{-1+\sqrt{5}}{.2}}{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}=\frac{-1+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$$

Para realizar esta operación debemos recordar cómo se resuelve el problema de la división por un número irracional o por una expresión algebraica irracional.

El concepto de **racionalización de denominadores** es el que nos permite resolver este problema, ya que a través de este procedimiento se transforma el divisor irracional en racional, y la división con divisor racional quedó resuelto en el conjunto Q.

Consideremos este otro caso: **El denominador es un binomio y alguno de sus términos es un radical**

Necesitamos hacer la siguiente división: $\frac{-1+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$

Para lograr simplificar esta expresión y que no aparezca el radical en el denominador, utilizamos la siguiente propiedad:

Diferencia de cuadrados:

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2 \quad (1)$$

Observando la propiedad (1) vemos que si a y/o b son radicales de índice 2, entonces al multiplicarlos por el conjugado desaparece el signo radical.

Llamamos conjugado de la expresión a+ b a la expresión a – b

Por eso es que para poder dividir radicales, lo que hacemos es multiplicar numerador y denominador por el conjugado del denominador, con el objetivo de eliminar el signo radical del denominador.

Veamos cómo lo hacemos:

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}=\frac{\left(-1+\sqrt{5}\right)\left(3+\sqrt{5}\right)}{\left(3-\sqrt{5}\,\right)\left(3+\sqrt{5}\right)}=$$

Aplicamos la propiedad distributiva en el numerador y expresamos como diferencia de cuadrados el denominador

Simplificamos la expresión

$\frac{-3+3\sqrt{5}-\sqrt{5}+5}{9-5}=\frac{2+2\sqrt{5}}{4}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\emptyset$

Es decir que, en un segmento dividido en forma armónica, la razón de las partes es también el número de oro.

Para racionalizar un denominador, si el denominador es de la forma $a + b\sqrt{c}$ o $a.\sqrt{d} + b\sqrt{c}$, multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del denominador y utilizamos diferencia de cuadrados

Consideremos ahora otro caso más; en que el **denominador es una suma o diferencia de raíces cuadráticas.**

Ejemplo 1: Racionaliza el denominador de la siguiente expresión

$$\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

Solución. Para eliminar los radicales del denominador, multiplicamos la expresión dada por

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

Así $$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}$$

Ejemplo 2:

$$\frac{2}{2\sqrt{5} - 3\sqrt{7}} = \frac{2}{\left(2\sqrt{5} - 3\sqrt{7}\right)} \cdot \frac{\left(2\sqrt{5} + 3\sqrt{7}\right)}{\left(2\sqrt{5} + 3\sqrt{7}\right)} = \frac{2\left(2\sqrt{5} + 3\sqrt{7}\right)}{2^2\left(\sqrt{5}\right)^2 - 3^2\left(\sqrt{7}\right)^2} =$$

$$= \frac{4\sqrt{5} + 6\sqrt{7}}{4.5 - 9.7} = \frac{4\sqrt{5} + 6\sqrt{7}}{-43} = -\frac{4}{43}\sqrt{5} - \frac{6}{43}\sqrt{7}$$

Con racionalización de denominadores finalizamos el desarrollo de la presentación de los distintos conjuntos numéricos. Pero antes de cerrar este apartado, viene una observación:

En el conjunto de los números reales tampoco queda resuelto el problema de la radicación con índice par y radicando negativo. Ejemplo: $\sqrt{-4}$. Por ello:

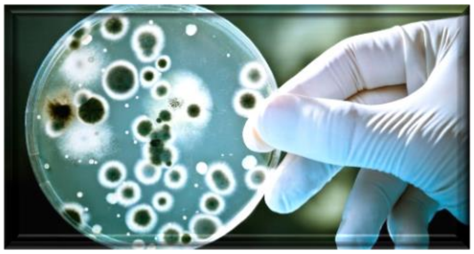
La radicación no es cerrada en **R**

Seguramente ahora te estarás preguntando:
¿Existe un nuevo conjunto numérico para resolver las raíces de índice par y radicando negativo? Y si existe, ¿cómo representamos sus elementos si la recta numérica está completa con los números reales?.
Las respuestas a estas preguntas quedan para otro curso.

LOGARITMACIÓN

Así como la operación inversa de la adición es la sustracción y de la multiplicación es la división, la logaritmación es una de las operaciones inversas de la potenciación en los reales (**R**). Aquí repasaremos la definición y las propiedades de esta operación.
Vamos a iniciar el desarrollo del tema planteado una situación problemática que se resuelve utilizando esta operación.

Situación problemática: El experimento con las bacterias



En un laboratorio se desarrolla un experimento con cierto tipo de bacterias. Cuando se inicia el ensayo se contabilizan 12000 bacterias. Al cabo de 3 hs, la cantidad asciende a 20.736 bacterias. Este crecimiento de bacterias responde a esta fórmula:

$$C_n = 12000.\,1{,}2^t$$

El laboratorista se pregunta: ¿En qué momento habrá 89161 bacterias?

Para dar respuesta esta pregunta es necesario tener en claro la definición de la operación logaritmación y sus propiedades. Por eso a continuación haremos un repaso sobre estas cuestiones.

Definición: Se llama logaritmación a la operación por la cual se calcula el exponente $\boldsymbol{c}$ al que se tiene que elevar un número $\boldsymbol{a}$ positivo y distinto de 1 para obtener otro número $\boldsymbol{b}$. En forma simbólica:

$$\boldsymbol{log_a b = c \iff a^c = b, con\ a > 0\ y\ a \neq 1}$$

y se lee logaritmo en base $\boldsymbol{a}$ de $\boldsymbol{b}$ es igual a $\boldsymbol{c}$; $\boldsymbol{b}$ *se llama* $\boldsymbol{argumento}$ del logaritmo

Ejemplos:

- $\log_3 81 = 4 \Leftrightarrow 3^4 = 81$
- $\log_5 25 = 2 \Leftrightarrow 5^2 = 25$
- $\log_{\frac{1}{2}} 16 = -4 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 16$
- $\log_{\sqrt{6}} 216 = 6 \Leftrightarrow \sqrt{6}^6 = 216$

Un breve análisis de las restricciones de la definición de logaritmación:

$\boldsymbol{a \neq 1}$ porque $\log_1 b$ sólo podría calcularse cuando $b = 1$ ya que $1^c = 1$ para cualquier valor de c.

$\boldsymbol{b > 0}$ porque resulta de una potencia de a (que es positivo).

- **Casos particulares**

✓ $\log_a 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^0 = 1$
✓ $\log_a a = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a^1 = a$

- **Propiedades de la logaritmación**

✓ *La logaritmación no es cerrada en R.* No siempre es posible obtener el logaritmo de un número real. Veamos algunos casos.

a) Logaritmo de un número negativo y base positiva.
Ejemplo:

$$\log_2(-4) = c \Leftrightarrow 2^c = -4$$

Ningún valor de c cumple esa condición , porque una potencia con base positiva nunca es negativa.
Es decir que $log_2(-4)$ *es imposible en Reales*.

b) Logaritmo de cero.
Ejemplo:

$$\log_3 0 = c \Leftrightarrow 3^c = 0$$

Ninguna potencia de 3 es cero.
Es decir que $log_3 0$ *es imposible en Reales*.
Generalizando: $log_a 0 \ es\ imposible\ para\ a \neq 0$

c) Logaritmo en base 1
Ejemplo:

$$\log_1 7 = c \Leftrightarrow 1^c = 7$$

Ningún valor de c cumple esa condición , porque una potencia con base 1 nunca es igual a 7, siempre es 1.
Generalizando: $log_1 b \ es\ imposible\ para\ b \neq 1$

A partir de los ejemplos dados se puede observar que:

La logaritmación de números positivos y base positiva distinta de 1 siempre es posible

En consecuencia, todas las propiedades que se presentan a continuación se cumplen cuando se refieren a logaritmos de números positivos y base distinta de 1. Por tanto la *logaritmación es cerrada en los reales positivos* (R^+) *(para* $b \neq 1$)

- *La logaritmación cumple la propiedad uniforme.* $\boldsymbol{x = y \ \Rightarrow \ \log_a x = \log_a y}$

  Esta propiedad indica que el logaritmo de un número positivo es único.

- *La logaritmación cumple la propiedad cancelativa.* $\boldsymbol{\log_a x = \log_a y \ \Rightarrow \ x = y}$
  Ejemplo:

$$\log_3 x = \log_3 9 \ \Rightarrow \ x = 9$$

- *Logaritmo de un producto.* $\boldsymbol{log_a(x.y) = log_a x + log_a y}$

  Ejemplos:

$$\log_2(16 \cdot 32) = \log_2 16 + \log_2 32 = 4 + 5 = 9$$

$$\log_{\frac{1}{5}}(25 \cdot 125) = \log_{\frac{1}{5}} 25 + \log_{\frac{1}{5}} 125 = -2 + (-3) = -5$$

- *Logaritmo de un cociente.* $\boldsymbol{log_a(x \div y) = log_a x - log_a y}$

  Ejemplos:

$$\log_4(16 \div 1024) = \log_4 16 - \log_4 1024 = 2 - 5 = -3$$

$$\log_7\left(\frac{2401}{49}\right) = \log_2 2401 - \log_2 49 = 4 - 2 = 2$$

- *Logaritmo de una potencia.* $\boldsymbol{log_a x^n = n.log_a x}$

  Ejemplos:

$$\log_5 125^6 = 6.\log_5 125 = 6.3 = 18$$

$$\log 100^{12} = 12.\log 100 = 12.2 = 24$$

$$\log_{\sqrt{7}} \sqrt[3]{49} = \log_{\sqrt{7}} 49^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}.\log_{\sqrt{7}} 49 = \frac{1}{3}.4 = \frac{4}{3}$$

El último ejemplo en el que se aplicó el logaritmo de una potencia muestra como el logaritmo de una raíz se reduce al logaritmo de una potencia teniendo en cuenta que un radical puede expresarse como una potencia de exponente fraccionario.

La logaritmación no es distributiva con respecto a ninguna de las operaciones definidas en el conjunto de los números reales ¡RECORDAR!

- **Logaritmos decimales y logaritmos nepperianos**

Como pueden ver los logaritmos pueden tener distintas bases, pero hay dos bases especiales a tener en cuenta ya que en general son las más utilizadas. La base decimal ($\boldsymbol{b = 10}$) y la natural o nepperiano ($\boldsymbol{b = e = 2.718281828}\ldots$). Estos logaritmos se indican de la siguiente manera: **log** y **ln** respectivamente.

Por ejemplo:

El logaritmo decimal de 89 se escribe $\log 89$

El logaritmo nepperiano o natural de 32 se escribe $\ln 32$

Ambos logaritmos se encuentran en la calculadora científica.

log quiere decir $\log_{10}$

ln significa logaritmo natural o logaritmo en base e, donde e es un número irracional 2,7182818285….

- **Cambio de base**

El logaritmo $\log_a b$ puede escribirse en términos de otra base, de la siguiente forma:

$$\boxed{\boldsymbol{log_a b = \frac{log_w b}{log_w a}}}$$

Para comprobar esta propiedad, lo que debemos calcular es el exponente al que hay que elevar ***a*** para que dé ***b***. Supongamos que este valor es ***c***.

$$a^c = b \implies \text{aplicando la propiedad uniforme}$$

$$log_w a^c = log_w b$$

usando la propiedad de logaritmo de una potencia

$$c \cdot log_w a = log_w b \implies \text{como } c = \log_a b$$

Reemplazando por $c = \log_a b$

$$log_a b \cdot log_w a = \log_w b \implies \log_a b = \frac{log_w b}{log_w a}$$

Ejemplo: hallar $\log_2 45$

Se puede calcular ese logaritmo haciendo el cambio de base y utilizando la calculadora. Tenemos las dos opciones: con el logaritmo decimal o con el logaritmo nepperiano

$$\log_2 45 = \frac{\log 45}{\log 2} \qquad \text{o} \qquad \log_2 45 = \frac{\ln 45}{\ln 2}$$

. En ambos casos el resultado debería ser el mismo porque como vimos el logaritmo de un número es único.

Retomemos la situación problemática: El experimento con las bacterias

Ahora veremos cómo se utilizan las propiedades de la logaritmación para dar respuesta al problema inicial. Recordemos datos y pregunta:

El crecimiento de bacterias responde a esta fórmula:

$$\boldsymbol{C_n = 12000.\,1,2^t}$$

Esta es una **fórmula** que relaciona números que corresponden al crecimiento de las bacterias con el tiempo.

Y el laboratorista se pregunta: ¿En qué momento habrá 89161 bacterias?

Para saber en qué momento había esa cantidad bacterias hay reemplazar en la fórmula el dato de C_n por 89161 y queda planteada esta ecuación:

$$12000.\,1,2^t = 89161$$

Definición: Una ecuación se llama exponencial cuando la variable o incógnita se encuentra en el exponente

En la ecuación, la incógnita (t) se encuentra en el exponente. Entonces debemos resolver una **ecuación exponencial.** En este caso, despejar la incógnita t

$$12000.\,1,2^t = 89161$$

$$1,2^t = \frac{89161}{12000}$$ - ***Se transpone el factor 12000.***

$$\log 1,2^t = \log 7,43$$ - ***Se aplica propiedad uniforme de la logaritmación.***

$$t \log 1,2 = \log 7,43$$ - ***Se aplica la propiedad logaritmo de una potencia.***

$$t = \frac{\log 7,43}{\log 1,2}$$ - ***Se despeja la incógnita t***

$$t = 11$$ - ***Se resuelve utilizando la calculadora***

Respuesta: Al cabo de 11 horas la población alcanza la cantidad de 20736 bacterias.

Este es un ejemplo de una situación problemática en la que se utiliza la operación logaritmación y sus propiedades.

A continuación vamos a resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas muy sencillas que servirán para poner en práctica los conceptos de logaritmación que trabajamos en este apartado.

- **Ecuaciones exponenciales**

Recordemos que las ecuaciones exponenciales son aquellas en las que la incógnita aparece en un exponente o en más de uno.

Comentario: aquí presentaremos solamente ecuaciones exponenciales en las que se utiliza la logaritmación en la resolución.

Ejemplo 1

$$2^{x+3} = 5$$

$$\log 2^{x+3} = \log 5$$

$$(x+3) \cdot \log 2 = \log 5$$

$$x + 3 = \frac{\log 5}{\log 2}$$

$$x + 3 \cong 2{,}32$$

$$x \cong 2{,}32 - 3$$

$$\boldsymbol{x \cong -0{,}68}$$

- ***Se aplica propiedad uniforme de la logaritmación.***
- ***Se aplica la propiedad logaritmo de una potencia.***
- ***Se utiliza la calculadora para hallar el logaritmo***
- ***Se aproximó en este caso al centésimo. Por eso aparece el símbolo de aproximadamente igual*** ($\cong$)
- ***Se despeja la incógnita x***

Ejemplo 2

$$2.3^{x} + 5\,.3^{x} - 3.3^{x} = 2$$

$$4.3^{x} = 2$$

$$3^{x} = \frac{2}{4}$$

$$3^{x} = 0{,}5$$

$$\log 3^{x} = \log 0{,}5$$

$$x.\log 3 = \log 0{,}5$$

$$x = \frac{\log 0{,}5}{\log 3}$$

$$\boldsymbol{x \cong -0{,}63}$$

- ***Se suman términos semejantes***
- ***Se aplica propiedad uniforme de la logaritmación.***
- ***Se aplica la propiedad logaritmo de una potencia.***
- ***Se aproximó en este caso al centésimo. Por eso aparece el símbolo de aproximadamente igual*** ($\cong$)
- ***Se despeja la incógnita x***
- ***Se resuelve utilizando la calculadora***

No hay que olvidarse de hacer la verificación de la solución hallada.

- **Ecuaciones logarítmicas**

Las ecuaciones logarítmicas son las que tienen la incógnita en el argumento de algún logaritmo.

Ejemplo 3

$$\log_2(x+1) = 3$$

$$x + 1 = 2^3$$

- ***Se aplica la definición de logaritmación***.

$$x = 8 - 1$$

$$\boldsymbol{x = 7}$$

Ejemplo 4

$$\log_2(x+7) - \log_2(x+1) = 4$$

$$\log_2 \frac{x+7}{x+1} = 4$$

- ***Se aplica logaritmo de un cociente***
- ***Se aplica la definición de logaritmación***.

$$\frac{x+7}{x+1} = 2^4$$

$$x + 7 = 16.(x+1)$$

$$x + 7 = 16x + 16$$
$$7 - 16 = 16x - x$$
$$\boldsymbol{x = -\frac{9}{15}}$$

No hay que olvidarse de hacer la verificación de la solución hallada.

ECUACIONES LINEALES CON UNA INCÓGNITA

Muchas situaciones provenientes de la Matemática y de la realidad se pueden expresar simbólicamente mediante ecuaciones lineales. De esta manera las ecuaciones lineales son modelos matemáticos que permiten describir conceptos matemáticos o fenómenos reales.
En este apartado definiremos a las ecuaciones lineales, veremos algunas características de ellas y resolveremos ecuaciones lineales con una sola incógnita a partir de ejemplos.

Iniciamos el tema con el planteo de dos situaciones problemáticas:

Problema 1: El perímetro de la figura es $10\sqrt{5}$ cm. Hallar la incógnita x.

Problema 2: Si al triple de mi edad actual le sumo el doble de la que tenía hace 4 años, obtengo 57 años. ¿Qué edad tengo?

Para pensar en la solución de ambos problemas, necesitamos recurrir al planteo y resolución de ecuaciones de este tipo:

Problema 1

$$3\sqrt{5} + 3\sqrt{5} + x + x = 10\sqrt{5}$$

$$2x = 10\sqrt{5} - 6\sqrt{5}$$

$$x = 4\sqrt{5} \div 2$$

$$x = 2\sqrt{5}$$

Problema 2

En este problema la incógnita indicada con la "x" será la edad actual.

$$3x + 2(x - 4) = 57$$
$$3x + 2x - 8 = 57$$
$$5x = 57 + 8$$
$$x = \frac{65}{5}$$
$$x = 13$$

Respuesta: La edad actual es de 13 años

Estas igualdades en las que la incógnita está elevada a la primera potencia se llaman **ecuaciones de primer grado o ecuaciones lineales**. Como en estos casos aparece una sola incógnita ($identificada\ aquí\ con\ la\ letra\ x$), estamos en presencia **de ecuaciones lineales con una sola incógnita**.

Una ecuación es lineal si se puede reducir a la forma $\boldsymbol{ax+b=0}$ y resolver una ecuación lineal significa hallar el valor de la incógnita que verifica la igualdad.

$x=2\sqrt{5}$ y $x=13$ es el valor de x que verifica la igualdad en las ecuaciones lineales que resuelven el problema 1 y problema 2, respectivamente.

Al conjunto formado por todas las soluciones de una ecuación se lo llama **conjunto** solución de la ecuación y lo simbolizaremos **S**.

Ejemplos: $S=\{2\sqrt{5}\}$ $S=\{13\}$

En cada una de las ecuaciones de los problemas presentados, por ejemplo en la del problema 2, al realizar el primer despeje:

$$3x+2(x-4)=57 \quad \textbf{(A)}$$
$$3x+2x-8=57 \quad \textbf{(B)}$$

queda una ecuación equivalente **(B)** a la dada. Basta reemplazar en **(A)** y **(B)** $x=13$ y verifica ambas ecuaciones.

Dos ecuaciones que tienen las mismas soluciones se llaman **ecuaciones equivalentes.**

- **Resolución de ecuaciones lineales con una sola incógnita**

En los ejemplos que siguen se resuelve una ecuación mediante transformaciones algebraicas. El procedimiento se realiza de modo tal de garantizar que cada una de las ecuaciones que se obtiene en un paso es equivalente a la anterior, es decir, tienen las mismas soluciones.

Con la presentación de distintos ejemplos se da la posibilidad de repasar y comprender mejor el tema.

Comenzamos con esta ecuación simple.

- **Ejemplo 1:** Resolver la ecuación $4x-7=(-3)^2x+(-2)^3.3$

Antes de resolver una ecuación se debe analizar cómo está conformado cada miembro de la ecuación, qué operaciones aparecen y también si hay paréntesis, corchetes y llaves. Esto es muy importante porque para despejar la incógnita se debe respetar el orden en que se resuelven las operaciones que están en los distintos términos (recuerden que los + y – son los que separan los términos).

$$\overbrace{4x+1}^{1° \text{ miembro}} = \overbrace{(-3)^2x+(-2)^3.3}^{2° \text{ miembro}}$$
$$4x+1 = 9x+(-8).3$$
$$4x+1 = 9x-24$$
$$4x-9x = -24-1$$
$$-5x = -25$$
$$x = (-25) \div (-5)$$
$$x = +5$$

$$\boldsymbol{S} = \{+\mathbf{5}\}$$

1º. Se resuelven las operaciones que están en los términos de cada miembro (en este caso potencias y multiplicación).

2º. Se transponen términos para agrupar términos semejantes (los que tienen incógnita x y los que no tienen).
3º. Se despeja la incógnita.

No hay que olvidarse de hacer la verificación de la solución. Es decir, reemplazar el valor hallado de la incógnita en la ecuación y comprobar que se cumple la igualdad.

Verificación

$$4 \cdot (+5)+1 = (-3)^2 \cdot (+5)+(-2)^3.3$$
$$20+1 = 9 \cdot (+5)+(-8).3$$
$$21 = 45-24$$
$$\mathbf{21 = 21}$$

En las ecuaciones lineales pueden aparecer paréntesis, corchetes y llaves. El ejemplo siguiente es una muestra de ello.

- **Ejemplo 2**: Resolver la ecuación $-2(1-2x)-(1-2x) = -x-2$

$$-2(1-2x)-(1-2x) = -x-2$$
$$-2+4x-1+2x = -x-2$$
$$6x-3 = -x-2$$
$$6x+x = -2+3$$
$$7x = 1$$
$$x = 1 \div 7 = \frac{1}{7}$$

$$\boldsymbol{S} = \left\{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{7}}\right\}$$

1º. Se analiza las operaciones que afectan los paréntesis que aparecen en cada término.
2º. Se aplica la propiedad distributiva de la multiplicación.
3º. Se transponen términos para agrupar términos semejantes (los que tienen incógnita x y los que no tienen).
4º. Se despeja la incógnita.
5º. Se deja la división expresada como fracción.

No hay que olvidarse de hacer la verificación de la ecuación. ¡Recordar!

Ahora veamos un ejemplo en las que aparecen fracciones en los términos.

- **<u>Ejemplo 3</u>**: Resolver la ecuación $\frac{(x-2)2}{3} = \frac{2x-1}{4} + \frac{7}{12}$

Consideremos dos opciones para la resolución de esta ecuación (no son las únicas).

✓ **Opción 1:**

$$\frac{(x-2).2}{3} = \frac{2x-1}{4} + \frac{7}{12}$$

$$\frac{2x-4}{3} = \frac{3(2x-1)+7}{12}$$

$$\frac{2x-4}{3} = \frac{6x-3+7}{12}$$

$$\frac{2x-4}{3} = \frac{6x+4}{12}$$

$$\overset{4}{\cancel{12}} \cdot \frac{2x-4}{\underset{1}{\cancel{3}}} = \frac{6x+4}{\underset{1}{\cancel{12}}} \cdot \overset{1}{\cancel{12}}$$

$$8x - 6x = 4 + 16$$

$$2x = 20$$

$$x = 20 \div 2 = \mathbf{10} \qquad \boldsymbol{S} = \{\mathbf{10}\}$$

1º. Se opera. En el primer miembro aplicando la propiedad distributiva, así se suprime el paréntesis. En el segundo miembro, sacando denominador común para sumar las fracciones.
2º. Se suman los términos semejantes en los numeradores de las fracciones.
3º. Se aplica la propiedad uniforme de la multiplicación. Se multiplican ambos miembros por el mcm (3, 12)=12. De esta manera se eliminan los denominadores.

✓ **Opción 2:**

$$\frac{(x-2).2}{3} = \frac{2x-1}{4} + \frac{7}{12}$$

$$\overset{4}{\cancel{12}} \cdot \frac{(x-2).2}{\underset{1}{\cancel{3}}} = \left(\frac{2x-1}{4} + \frac{7}{12}\right) \cdot 12$$

$$8x - 16 = \frac{2x-1}{\underset{1}{\cancel{4}}} \cdot \overset{3}{\cancel{12}} + \frac{7}{\underset{1}{\cancel{12}}} \cdot \overset{1}{\cancel{12}}$$

$$8x - 16 = (2x-1) \cdot 3 + 7$$

$$8x - 16 = 6x - 3 + 7$$

$$8x - 6x = 4 + 16$$

$$2x = 20$$

$$x = 20 \div 2 = \mathbf{10}$$

$$\boldsymbol{S} = \{\mathbf{10}\}$$

La diferencia respecto a la opción 1 es que primero se aplica la propiedad uniforme de la multiplicación.

Se multiplican ambos miembros por el mcm (3, 12)=12. De esta manera se eliminan los denominadores.

Luego, se utiliza el mismo procedimiento que en la opción 1.

No hay que olvidarse de hacer la verificación de la ecuación. ¡Recordar!

- **Ecuaciones lineales con una incógnita con infinitas soluciones y sin solución**

Todas las ecuaciones de los ejemplos dados hasta el momento tienen una única solución. Pero no siempre es así, también existen ecuaciones con infinitas soluciones o sin solución. Veamos ejemplos de estas situaciones.

- **Ejemplo 4**: Resolver la ecuación $\frac{2x+3}{2} + 1 = x + 5$

Resolvemos la ecuación en la que aparece una fracción utilizando una nueva opción, diferente a las dos presentadas.

$$\frac{2x+4}{2} + 1 = x + 3$$

$$\frac{2x}{2} + \frac{4}{2} + 1 = x + 3$$

Se aplica la propiedad distributiva de la división.

$$x + 2 + 1 = x + 3$$

$$x - x = 3 - 2 - 1$$

$$\mathbf{0 \cdot x = 0}$$

Si se observa la expresión que queda puede notarse que cualquier número real multiplicado por cero es igual a cero.

Entonces la igualdad $\mathbf{0 \cdot x = 0}$ se verifica con cualquier número real, por eso la ecuación tiene infinitas soluciones. Se expresa así:

$$\boldsymbol{S = R}$$

- **Ejemplo 5**: Resolver la ecuación $3 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}x = -x + 7$

$$3 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}x = -x + 7$$

Se suman los términos semejantes.

$$3 - \frac{2}{2}x = -x + 7$$

$$-x + x = 7 - 3$$

$$\mathbf{0x = 4}$$

Si se observa la expresión que queda puede notarse que cualquier número real multiplicado por cero es igual cero. NUNCA SERÁ igual a cuatro o a cualquier número distinto de cero.

Entonces la igualdad $\boldsymbol{0 \cdot x = b,\ siendo\ b \neq 0}$ no se cumple nunca, para ningún número real, por eso la ecuación no tiene solución. Se expresa así:

$$\boldsymbol{S} = \emptyset$$

POLINOMIOS.FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

Los polinomios son expresiones algebraicas enteras, como consecuencia su origen está muy ligado a la del Álgebra en Babilonia y en Egipto hace unos 4000 años.

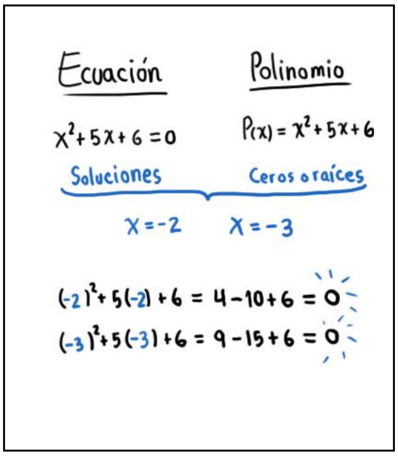
En el siglo XVI AC. los egipcios desarrollaron un álgebra muy elemental con la finalidad de poder resolver problemas cotidianos que tenían que ver con la repartición de víveres, de cosechas y de materiales.

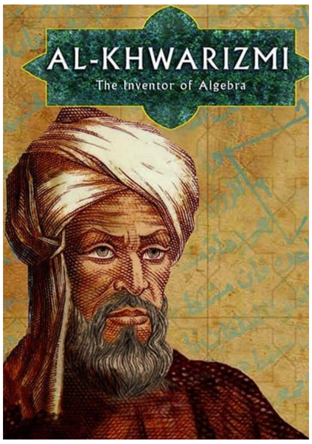
El precursor del álgebra moderno fue Diofanto de Alejandría, matemático griego, quien publicó su gran obra "Ars magna" en la que se trataron de una forma rigurosa no sólo las ecuaciones de primer grado, sino también las de segundo. Introdujo un simbolismo algebraico muy elemental designando la incógnita con un signo que es la primera sílaba de la palabra griega arithmos (número). Los problemas de Álgebra que propuso prepararon el terreno de lo que siglos más tarde sería la teoría de ecuaciones.

Otro matemático ilustre fue Mohammed ibn-Musa Al-Jwarizmi, que vivió aproximadamente entre los años 780 y 850 y fue miembro de la Casa de la Sabiduría. A este matemático, debemos el término álgebra, que proviene del título del libro"Al-jabrw´al-muqabalah", que significa ciencia de la trasposición y de la simplificación.

Resolver ecuaciones algebraicas, por ejemplo, es equivalente a hallar los ceros o raíces de un polinomio. Es por ello que aprender a factorizar y completar cuadrados, permite no sólo hallar los valores de *x* que anulan a un polinomio, sino también resolver ecuaciones algebraicas.

En este eje temático nos dedicaremos a estudiar los polinomios y algunas operaciones que se pueden hacer con ellos.





Contenidos de este Capítulo:

Funciones polinómicas. Polinomios. Características de los polinomios. Valor numérico de un polinomio. Polinomios iguales y polinomios opuestos. Suma y resta de polinomios. Producto de monomios y polinomios. Operaciones combinadas. División de polinomios. Raíces de un polinomio. Teorema del resto. Regla de Ruffini. Divisibilidad de polinomios. Factorización de polinomios. Teorema fundamental del Álgebra. Técnicas de factorización de polinomios: Factor común, Factor común por grupos, Diferencia de cuadrados, Trinomio cuadrado perfecto, Cuatrinomio cubo perfecto y Suma o diferencia de potencias de igual exponente. Raíces de un polinomio con coeficientes enteros. Teorema de Gauss. Factorización de polinomios a partir de sus raíces.

FUNCIONES POLINÓMICAS. MONOMIOS Y POLINOMIOS

Te proponemos entrar en tema con una situación problemática…

El depósito subterráneo

En una fábrica se debe construir un depósito subterráneo para instalar en él un tanque de combustible. Hay tres modelos de tanque: chico, mediano y grande. Cada uno de ellos requiere un depósito de forma cúbica de arista igual a 1m,2m y 3m respectivamente.
El depósito debe quedar enterrado en el suelo. Su parte superior, que es descubierta, estará al ras de la tierra. Su piso y sus cuatro paredes se cubrirán con planchas de fibrocemento, y todas las junturas entre esas planchas irán selladas con unos listones especiales de hierro.
La fábrica dispone de hasta $ 6500 para construir el depósito.
Los costos son los siguientes: $ 400 por metro cúbico excavado, $ 120 por metro cuadrado de plancha de fibrocemento y $ 40 por metro (lineal) de listón de hierro. Además, hay que agregar un gasto fijo de $ 170 en concepto de flete.
¿Cuál de los tres depósitos puede construirse con ese presupuesto? Para saberlo, buscaremos una fórmula para el costo de construcción, en función de la arista **x**del depósito, en metros

Analicemos en forma separada cada uno de los gastos.

- Por un lado tenemos el flete, cuyo costo de $ ……………..es constante.

- Como el depósito es cúbico, todas las aristas son …………; entonces, el volumen del depósito es: V= …………………..

El costo del metro cúbico excavado es de $ 400; por lo tanto, el costo total del volumen excavado es: C_V = …………………..

- El depósito tiene un total de ………caras para cubrir con las planchas de fibroce- mento. La superficie de cada plancha en m^2 es:

S= …………………………………

El costo del metro cuadrado de fibrocemento es de $ ………………. Entonces, el costo de una plancha es : C= ………………………, y el costo de todas las planchas es:

C_P= ……………………………….

- El depósito tiene un total de .... junturas entre todas sus caras. El costo del metro lineal de cada listón de hierro es de $.................. Un listón que cubre una juntura cuesta: C= …………………., y el costo de todos los listones es:

C_L= ....

- Traslademos los valores anteriores a esta tabla:

Gastos	**Costo**
Flete	**170**
Listones de hierro	**320 x**
Planchas de fibrocemento	**600 x^2**
Excavación	**400 x^3**
Costo Total	**400 x^3+600 x^2 + 320 x +170**

A cada uno de los términos escritos en **violeta**(ubicados en las cuatro primeras líneas de la segunda columna)se lo denomina **monomio**, y a la suma de ellos, en color **rojo**(quinta línea y segunda columna), se lo llama **polinomio.**
El costo total de la construcción puede expresarse mediante la fórmula:

$$C(x)= 400\ x^3+600\ x^2 + 320\ x +170$$

Escribimos **C(x)** porque el costo **<u>es función</u>** de la longitud de **x** de la arista del depósito. Es decir, para cada valor de la arista (x) le corresponde un único costo (**C(x)**). Calculemos el costo total para aristas de 1 m , de 2 m y de 3 m.

✓ $C(1) = 400 . 1^3 + 600 . 1^2 + 320 . 1 + 170$ = ……………………………………….
✓ C(2) ……………………………………………………………………………...
✓ C(3) ……………………………………………………………………………...

El tanque podrá construir el depósito que albergue el tanque …………………………..

INFORMACIÓN

GeoGebra es un software matemático interactivo libre para la educación en colegios y universidades. Su creador Markus Hohenwarter, comenzó el proyecto en el año 2001, como parte de su tesis, en la Universidad de Salzburgo, lo continuó en la Universidad Atlántica de Florida (2006–2008), luego en la Universidad Estatal de Florida (2008–2009) y en la actualidad, en la Universidad de Linz, Austria. (Fuente: https://es.wikipedia.org/wiki/GeoGebra)
Te invitamos a que ingreses a la página de GeoGebra: https://www.geogebra.org/ y descargues el software en el teléfono o computadora.

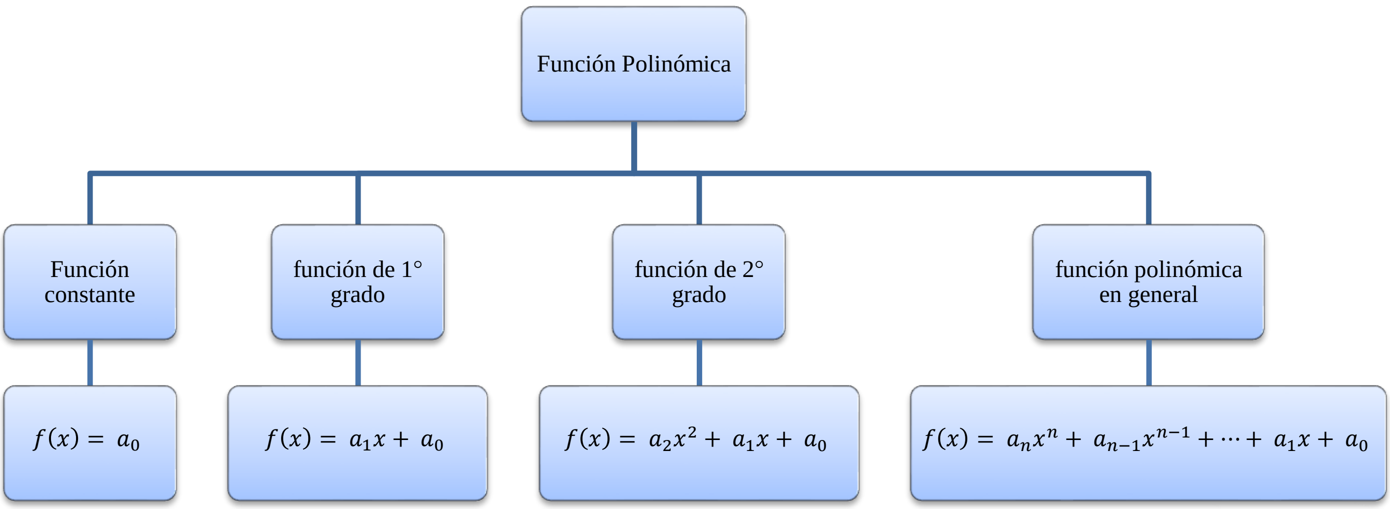
ACTIVIDAD

- Te proponemos que representes gráficamente con el GeoGebra la función C(x) vinculada al problema del depósito subterráneo y describas características que observas en la gráfica.

→**Algunas definiciones…**

Función polinómica:
Dados los números reales a_n , a_{n-1}, ……. a_n, siendo n un número natural, la función polinómica, en una indeterminada, es una suma algebraica de términos, cada uno de los cuales consta de un coeficiente numérico o constante, multiplicado por una cierta potencia de la variable x, que abreviaremos simbólicamente con f(x), g(x), etc., se expresa en general así:

$$\mathbf{f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}$$



ACTIVIDAD

- Te proponemos que propongas funciones polinómicas de primero, segundo y tercer grado y las representes gráficamente con el GeoGebra. Describe las características que observas en cada uno de ellas.

A la expresión algebraica que define a una función polinómica se la denomina **POLINOMIO.**

En esta unidad estudiarán los polinomios cuya expresión genérica es la misma que la función polinómica y su notación es con una letra mayúscula imprenta, por ejemplo P, Q, etc.

$$\mathbf{P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}$$

donde a_n , a_{n-1}, ……. a_n son los **coeficientes**, x es la **indeterminada.**

A partir de la expresión que genérica de un polinomio podemos escribir la siguiente definición:

Polinomio:
es una expresión algebraica, constituida por una o más variables, utilizando únicamente las operaciones aritméticas de suma, resta, multiplicación y exponentes numéricos positivos.

Ejemplo 1: $P(x)=5x^3 +2x^2 - 4$

- Polinomio de una indeterminada: x
- Los coeficientes son: 5, 2, -4
- Los términos son: $5x^3$, $2x^2$, -4

Si se tienen varias indeterminadas, x, y, z, … etc, es un polinomio en estas indeterminadas.

Ejemplo 2: $Q(x,y) = \frac{3}{5}x\,yz + x^2y - 3xz^2$ en x, y,z

- Polinomio de tres indeterminadas: x, y, z
- Los coeficientes son: $\frac{3}{5}$, 1, -3
- Los términos son: $\frac{3}{5}x\,yz, x^2y, -3xz^2$

Cada uno de los términos de un polinomio se denomina **MONOMIO.**

Monomios:
son expresiones algebraicas sólo con productos de números y potencias de variables de exponente natural.

En los ejemplos dados:
Ejemplo 1 ⟶ $5x^3$, $2x^2$, -4 , tres monomios
Ejemplo 2 ⟶ $\frac{3}{5}x\,yz, x^2y, -3xz^2$, tres monomios

- **Elementos de un monomio**
A la hora de denominar los elementos de un monomio, éstos se dividen en dos partes: **el coeficiente** y **la parte literal.**

El coeficiente está formado por el signo y por los números y la parte literal por las variables y sus exponentes.

$$\underbrace{-4}_{\text{Coeficiente}}\ \underbrace{x^3y^6}_{\text{Parte literal}}$$

Otra forma de definir un polinomio:
La suma de varios monomios es un polinomio.

A los polinomios que tienen sólo dos términos se los suele llamar **binomio**, tres términos, **trinomio**, cuatro términos, **cuatrinomio**. A partir de cinco términos se dice polinomio de cinco términos, seis términos, etc.

Cada polinomio que estudiaremos tiene asociada una función de reales en reales, llamada **función polinómica**. Nosotros **hablaremos indistintamente de polinomios o de funciones polinómicas**

CARACTERÍSTICAS DE LOS POLINOMIOS

Recordemos algunas características de los polinomios.

Grado de un polinomio:
La suma de los exponentes que aparecen en un término se llama el grado de ese término, y el máximo de los grados de todos los términos es el grado del polinomio.

- Si alguna variable **no tiene exponente**, equivale a que esa variable **está elevada a 1**.
- Si algún término está escrito sin variable significa que la **variable está elevada a la cero**.

Ejemplo:

$$Q(x,y) = xy^3 + 7x\ y\ z - 3yz^5 + 6$$

gr=4 gr=3 gr=6 gr=0

Por tanto, el polinomio Q(x,y) es de grado 6

Observa otros ejemplos de cómo se determina el grado:

- $5xy^4$ es un monomio de dos variables con coeficiente 3 de grado 5, uno por la x y cuatro por la y.
- $3/4\ x^2y^5$ es de grado 7, dos por la x y 5 por la y.
- El polinomio $P(x)= 3x^5+4x^2-2$ es de grado 5, el mayor grado de sus monomios.

☑En un polinomio el coeficiente del monomio de mayor grado es el **coeficiente principal** y al término a_0 se lo llama **término independiente**.
Ejemplo: $P(x)= 3x^5+4x^2- 2$, 3 es coeficiente principal y -2 término independiente

☑Un polinomio es **mónico** cuando su coeficiente principal es 1. Ej. $R(x)= x^5+4x^2-2$

☑ **Los términos semejantes** de un polinomio son aquellos que tienen exactamente la misma parte literal y cada una con los mismos exponentes.

- **Polinomio nulo,** es aquel que tiene todos sus coeficientes nulos.

Ejemplo: $P(x) = 0x^2 + 0x + 0x$

- **Polinomio homogéneo,** es aquél cuyos términos son todos del mismo grado.

Ejemplo: $P(x) = 2x^5 + x^2y^3 + 5x^4y + y^5$

- **Polinomio completo,** es aquel polinomio que presenta todos los términos algebraicos, desde el mayor, hasta el menor.

Ejemplo:
$P(x) = 6x^3 + 2x – 4x^2 + 4$
Presenta todos los términos desde el mayor grado ($6x^3$) hasta el menor (4).

- **Polinomio Ordenado,** es aquel que guarda un orden ascendente o descendente referido a los grados relativos.

Ejemplos:

$P(x) = x^2 + 2x^3 – x^5$	Polinomio ordenado en forma creciente
$P(x) = x^7 – 4x + 3$	Polinomio ordenado en forma decreciente
✓ Si el polinomio es de dos variables se ordena con respecto solo a una.	
$P(x, y) = 4x^3y^7 – 5x^2y^9 + 2xy^4$	Polinomio ordenado en forma decreciente con respecto a “x”
$P(x, y) = -5x^2y^9 + 4x^3y^7 + 2xy^4$	Polinomio ordenado en forma decreciente con respecto a “x”

- **Polinomio Completo y Ordenado,** es aquel polinomio que cumple los dos criterios anteriores.

Ejemplos:

$P(x) = 5x^4 – 3x^3 + x^2 + x + 3$	Observemos que es completo por que presenta todos los exponentes de "x" y además están ordenados en forma decreciente
$P(x) = 2 + 3x – 4x^2 + 15x^3$	Polinomio completo y ordenado en forma creciente

VALOR NUMÉRICO DE UN POLINOMIO

Retomemos el ejemplo del depósito subterráneo que se planteó al inicio de esta guía. Para calcular el costo total de la construcción en función de la longitud de **x** de la arista del depósito utilizaron la expresión polinómica:

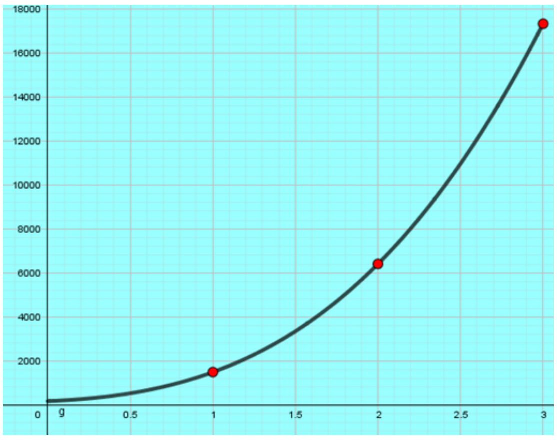
$$C(x)= 400\ x^3+600\ x^2 + 320\ x +170$$

Luego, calcularon costo total para aristas de 1 m , de 2 m y de 3 m. Los resultados que obtuvieron surgen de la sustitución de la variable x por 1, luego por 3 y finalmente por 3:

- ✓ $C(1) = 400 . 1^3 + 600 . 1^2 + 320 . 1 + 170 = 1490$
- ✓ $C(2) = 400 . 2^3 + 600 . 2^2 + 320 . 2 + 170 = 6410$
- ✓ $C(3) = 400 . 3^3 + 600 . 3^2 + 320 . 3 + 170 = 17330$

Cada uno de los resultados obtenidos es el **valor numérico** que toma **C(x)** para un valor de la indeterminada x. En el problema del depósito subterráneo los valores hallados tienen un significado: el costo total de la construcción según la longitud de la arista del depósito de forma cúbica enterrado en el suelo.

Teniendo en cuenta que un polinomio está asociado a una función polinómica, obtenemos el siguiente gráfico de **C(x)** en el que se destacan los valores numéricos calculados.



A partir de esta explicación, podemos definir de esta manera el **valor numérico de un polinomio**.

> **El valor numérico** de un polinomio es el resultado que obtenemos al sustituir la variable x por un número cualquiera.

Otros Ejemplos:
Calcular el valor numérico del polinomio: $P(x) = 2x^3 + 5x - 3$, para $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$.

$P(-1) = 2(-1)^3 + 5(-1) - 3 = 2(-1) - 5 - 3 = -2 - 5 - 3 = \mathbf{-10}$

$P(0) = 2 \cdot 0^3 + 5 \cdot 0 - 3 = \mathbf{-3}$

$P(1) = 2 \cdot 1^3 + 5 \cdot 1 - 3 = 2 + 5 - 3 = \mathbf{4}$

ACTIVIDAD

Dado el polinomio mónico $P(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$, calcular:

P(1) = ……………………………………………………………….

P(-2) = ……………………………………………………………

- ¿Cuáles son los resultados obtenidos?...

Las **raíces de un polinomio** (también llamadas ceros de un polinomio) son los valores para los cuales, el **valor numérico del polinomio es igual a cero**

Más adelante veremos que las **raíces de un polinomio** nos van a permitir descomponer los polinomios en factores, lo que su vez nos permitirá realizar la división de polinomios de una forma más fácil.

OPERACIONES CON POLINOMIOS EN UNA INDETERMINADA

Las operaciones con polinomios se utilizan con mucha frecuencia en la resolución de situaciones problemáticas, por ejemplo, en las que se plantean relaciones entre datos numéricos conocidos y variables o incógnitas. Ahora veremos cuáles son las leyes que rigen estas operaciones.

☑ Suma de polinomios

Suma de polinomios:
Cuando se suman o restan dos polinomios, el resultado es un polinomio.
La **suma** de dos polinomios consiste en sumar los coeficientes de los términos semejantes, dejándoles la misma parte literal. $S(x) = P(x) + Q(x)$

- **Ejemplo:**

Dados los polinomios: $P(x) = 5x^3 + 6x - 3$ $Q(x) = x - 3x^2 + 2x^3$
Te presentamos dos opciones para resolver la suma de P y Q.

✓ **Opción 1:**

1) Ordenamos los polinomios, si no lo están, y escribimos la suma:

$$P(x) + Q(x) = (5x^3 + 6x - 3) + (2x^3 - 3x^2 + x)$$

2) Agrupamos los monomios semejantes.

$$P(x) + Q(x) = 5x^3 + 2x^3 - 3x^2 + 6x + x - 3$$

3) Sumamos los monomios semejantes.

$$\mathbf{P(x) + Q(x) = 7x^3 - 3x^2 + 7x - 3} \longrightarrow \textbf{Polinomio Suma}$$

✓ **Opción 2:**

También podemos sumar los polinomios escribiendo uno debajo del otro, de forma que los monomios semejantes queden en columnas y se puedan sumar.

Se puede completar P(x) (no es necesario)

$$\begin{array}{r} 5x^3 + \mathbf{0\ x^2} + 6x - 3 \\ +\quad 2x^3 - 3x^2 + x \\ \hline \mathbf{7x^3 - 3x^2 + 7x - 3} \end{array} \longrightarrow \textbf{Polinomio Suma}$$

Resta de polinomios

La **resta** de dos polinomios es otro polinomio que se obtiene de sumar al polinomio minuendo el polinomio opuesto del sustraendo. Es decir, la resta se transforma en una suma de polinomios: $P(x) - Q(x) = P(x) + [- Q(x)]$

Dos polinomios son **opuestos** si sus coeficientes de igual grado son opuestos. Por ejemplo:

$Q(x) = 5x + 6x^2 - 7x^3$ y $- Q(x) = -5x - 6x^2 + 7x^3$

- **Ejemplo:**

Dados los polinomios: $P(x) = 7x^3 - 4x + 3$ $Q(x) = 5x + 6x^2 - 7x^3$
Te presentamos dos opciones para resolver la resta de P y Q.

✓ **Opción 1:**

1) Ordenamos los polinomios, si no lo están, y escribimos la suma:

$$P(x) - Q(x) = (7x^3 - 4x + 3) - (-7x^3 + 6x^2 + 5x)$$

2) Agrupamos los monomios semejantes.

$$P(x) - Q(x) = 7x^3 + 7x^3 - 6x^2 - 4x - 5x + 3$$

3) Sumamos los monomios semejantes.

$$\mathbf{P(x) - Q(x) = 14x^3 - 6x^2 - 9x + 3} \longrightarrow$$ **Polinomio Resta o diferencia**

✓ **Opción 2:**
También podemos restar los polinomios escribiendo uno debajo del otro, de forma que los monomios semejantes queden en columnas y se puedan resta.

$$\begin{array}{r} 7x^3 + 0x^2 - 4x + 3 \\ -\quad -7x^3 + 6x^2 + 5x \\ \hline \mathbf{14x^3 - 6x^2 - 9x + 3} \end{array} \longrightarrow$$ **Resto o diferencia**

ACTIVIDAD

Te proponemos que respondas las siguientes preguntas:

- ¿Es suficiente saber que dos polinomios P y Q tienen el mismo grado para asegurar que el resultado es otro polinomio del mismo grado?
- ¿Puedes imaginar dos polinomios del mismo grado cuya suma sea un polinomio de distinto grado?. Ejemplificar
- ¿Puede el polinomio suma carecer de grado?

☑ Multiplicación

El producto de dos funciones polinómicas P(x) y Q(x) es la función polinómica R(x) tal que R(x) = P(x). Q(x).

a) Multiplicación de un monomio por un polinomio

En **la multiplicación de un monomio por un polinomio** se multiplica el monomio por todos y cada uno de los monomios que forman el polinomio.
La multiplicación de monomios es otro monomio que tiene por coeficiente el producto de los coeficientes y cuya parte literal se obtiene multiplicando las potencias que tengan la misma base, es decir, sumando los exponentes.
Ejemplo:

$$3x^2 \cdot (2x^3 - 3x^2 + 4x - 2) = 6x^5 - 9x^4 + 12x^3 - 6x^2$$

El signo delante del paréntesis se puede omitir

$2x\,(x^4 - 3x^2 + 5x - 1) = 2x^5 - 6x^3 + 10x^2 - 2x$

b) Multiplicación de polinomios

El producto de dos polinomios es un nuevo polinomio que se obtiene multiplicando cada término del primero por cada uno de los términos del segundo, o sea, aplicando la propiedad distributiva.

Este tipo de operaciones se puede llevar a cabo de dos formas distintas.

Vamos a multiplicar los siguientes polinomios: $P(x) = 2x^2 - 3$ $\quad Q(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x$

✓ **Opción 1:**

1) Se multiplica cada monomio del primer polinomio por todos los elementos del segundo polinomio.

$$P(x) \cdot Q(x) = (2x^2 - 3) \cdot (2x^3 - 3x^2 + 4x) = = 4x^5 - 6x^4 + 8x^3 - 6x^3 + 9x^2 - 12x =$$

2) Se suman los monomios del mismo grado.

$$P(x) \cdot Q(x) = 4x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 9x^2 - 12x$$

Grado del polinomio P(x) · Q(x) = Grado de P(x) + Grado de Q(x) = 2 + 3 = 5

✓ **Opción 2:**

También podemos multiplicar polinomios escribiendo un polinomio debajo del otro.

- ✓ En cada fila se multiplica cada uno de los monomios del segundo polinomio por todos los monomios del primer polinomio.
- ✓ Se colocan los monomios semejantes en la misma columna y posteriormente se suman los monomios semejantes.
- ✓ Como la multiplicación de polinomios cumple la propiedad conmutativa, hemos tomado como polinomio multiplicador el polinomio más sencillo.

La multiplicación utilizando esta disposición con los polinomios planteados en nuestro ejemplo es:

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & & 2x^3 & -3x^2 & +4x \\
\times & & & 2x^2 & -3 \\
\hline
 & & -6x^3 & +9x^2 & -12x \\
4x^5 & -6x^4 & +8x^3 & & \\
\hline
4x^5 & -6x^4 & +2x^3 & +9x^2 & -12x
\end{array}$$

ACTIVIDAD

Te proponemos que completes cada frase y ejemplifiques cada situación

- Si ninguno de los factores es el polinomio nulo, el coeficiente principal del producto es el producto de los …………………………………………………………….. de cada factor.
- El término independiente del producto es el producto de los ……………………………de cada uno de los factores.
- Si uno de los factores es el polinomio nulo, el producto es el ………………………………...

c) Productos notables

Resolver los siguientes productos entre binomios, donde A y B representan monomios cualesquiera

a) (A + B) (A+B) = 	b) (A - B) (A -B) =

c) (A + B) (A-B) = 	d) $(A + B)^2$ (A +B) =

A continuación se ejemplifica lo solicitado en el ítem d) $(A + B)^2 (A+ B)$. Por definición de potencia podemos escribir:

$(A + B)^2 (A + B) = [(A + B) (A + B)] (A + B) =$
$= [A^2 + 2AB + B^2] (A + B) =$
$= A^2 (A + B) + 2 AB (A + B) + B^2 (A + B) =$
$= A^3 + A^2 B + 2 A^2 B + 2 AB^2 + AB^2 + B^3 =$
$= A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$

El polinomio obtenido es un **cuatrinomio cubo perfecto**. Entonces, encontrar el cubo de un binomio equivale a resolver cualquiera de los siguientes productos:

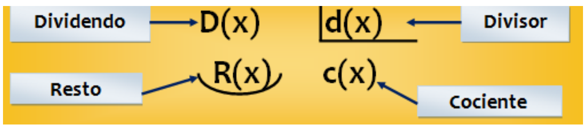
$$(A + B)^3 = (A + B) (A + B) (A+B) = (A + B)^2 (A + B) = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

ACTIVIDAD

¿Qué puedes decir de los polinomios obtenidos en las multiplicaciones a), b) y c)?. Caracterizarlas.

☑División entera de polinomios

Antes de realizar una división de polinomio recordemos lo que sucede en el algoritmo de la división de números enteros



Y se cumple la propiedad fundamental:

$$D(x) = d(x) \cdot c(x) + R(x)$$

A continuación, vamos a realizar la división entera de polinomios con el algoritmo que aprenderemos, en el cual C(x) es el polinomio cociente y R(x) es el Resto. Cabe destacar que **C(x) y R(x) son únicos.**

Antes de avanzar cómo se aplica la el algoritmo de la división de polinomios, observen las siguientes características:

- ✓ El divisor no puede ser el polinomio nulo.
- ✓ El grado de R(x) debe ser menor que el divisor, o bien R(x) es el polinomio nulo

a) División de un polinomio por un monomio

Para dividir un polinomio por un monomio, se divide cada monomio del polinomio por el monomio, hasta que el grado del dividendo sea menor que el grado del divisor.
Para comprobar que la división está bien hecha, miramos si se cumple la propiedad fundamental de la división:

$$D(x) = d(x) \cdot c(x) + R(x)$$

Ejemplo:
Sean los polinomios $D(x)=2x^2+x-2$ $d(x)=x$

$$\begin{array}{rr|l} 2x^2 & +\,x-2 & x \\ \cline{3-3} \underline{-2x^2} & & 2x+1 \\ 0 & +\,x & \\ & \underline{-x-2} & \\ & 0-2 & \end{array}$$

ACTIVIDAD

Te proponemos que compruebes ahora que se verifica la propiedad fundamental de la división: **D(x)=d(x)·c(x)+R(x)**

Observa que nuestro ejemplo se cumple que el grado del cociente es igual al grado del dividendo menos el grado del divisor:
$D(x) = 2x^2 + x - 2 \Rightarrow$ Grado de D(x) = 2
$d(x) = x \Rightarrow$ Grado de d(x) = 1
$c(x) = 2x + 1 \Rightarrow$ Grado de c(x) = 2 – 1 = 1

b) División de un polinomio por otro polinomio

Ejemplo

Consideremos estos dos polinomios:

$D(x)=x^4-2x^3-11x^2+30x-2$ y $\qquad d(x)=x^2+3x-2$

Para realizar la división de D(x) entre d(x) se procede del modo siguiente

1) Se colocan los polinomios igual que en la división de números y ordenados de forma creciente.

$$x^4-2x^3-11x^2+30x-20\ \big|\ \underline{x^2+3x-2}$$

2) Se divide el primer monomio del dividendo por el primer monomio del divisor. El resultado se pone en el cociente.

$$\begin{array}{l|l} x^4-2x^3-11x^2+30x-20 & x^2+3x-2 \\ \cline{2-2} & x^2 \end{array}$$

3) Se multiplica el cociente por el divisor y el producto obtenido se resta del dividendo: $(x^2+3x-2)\cdot x^{2'}=x^4+3x^3-2x^2$

Como hay que restar $x^4+3x^3+2x^2$ del dividendo, le sumamos el opuesto:$-(x^4+3x^3-2x^2)=-x^4-3x^3+2x^2$

$$\begin{array}{l|l} x^4-2x^3-11x^2+30x-20 & x^2+3x-2 \\ \cline{2-2} -x^4-3x^3+2x^2 & x^2 \\ \cline{1-1} \quad -5x^3-9x^2 & \end{array}$$

4) Se baja el término siguiente, 30x, y se divide, como en el ítem 2), el primer monomio del dividendo ($-5x^3$) por el primer monomio del divisor (x^2); es decir:

$$-5x^3\div x^2=-5x$$

y se coloca -5x en el cociente

$$\begin{array}{l|l} x^4-2x^3-11x^2+30x-20 & x^2+3x-2 \\ \cline{2-2} -x^4-3x^3+2x^2 & x^2-5x \\ \cline{1-1} \quad -5x^3-9x^2+30x & \end{array}$$

5) Se multiplica -5x por el divisor (x^2+3x-2) y el producto obtenido se resta del dividendo:

$$(x^2+3x-2)\cdot(-5x)=-5x^3-15x^2+10x$$

Como hay que restar $-5x^3-15x^2+10x$ del dividendo, le sumamos el opuesto: $-(-5x^3-15x^2+10x)=5x^3+15x^2-10x$

$$
\begin{array}{r|l}
x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 30x - 20 & x^2 + 3x - 2 \\ \cline{2-2}
-x^4 - 3x^3 + 2x^2 \qquad\qquad & x^2 - 5x \\ \cline{1-1}
-5x^3 - 9x^2 + 30x \qquad & \\
5x^3 + 15x^2 - 10x \qquad & \\ \cline{1-1}
6x^2 + 20x \qquad &
\end{array}
$$

6) Se baja el último término, -20, y se divide, como los apartados 2 y 4, el primer monomio del dividendo ($6x^2$) por el primer monomio del divisor (x^2) $6x^2 \div x^2 = 6$, y se coloca 6 en el cociente.

$$
\begin{array}{r|l}
x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 30x - 20 & x^2 + 3x - 2 \\ \cline{2-2}
-x^4 - 3x^3 + 2x^2 \qquad\qquad & x^2 - 5x + 6 \\ \cline{1-1}
-5x^3 - 9x^2 + 30x \qquad & \\
5x^3 + 15x^2 - 10x \qquad & \\ \cline{1-1}
6x^2 + 20x - 20 &
\end{array}
$$

7) Se multiplica 6 por el divisor y el producto obtenido se resta del dividendo:

$$(x^2+3x-2) \cdot 6 = 6x^2+18x-12$$

Como hay que restar este polinomio del dividendo, le sumamos el opuesto: $-(6x^2+18x-12) = -6x^2-18x+12$

$$
\begin{array}{r|l}
x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 30x - 20 & x^2 + 3x - 2 \\ \cline{2-2}
-x^4 - 3x^3 + 2x^2 \qquad\qquad & x^2 - 5x + 6 \\ \cline{1-1}
-5x^3 - 9x^2 + 30x \qquad & \\
5x^3 + 15x^2 - 10x \qquad & \\ \cline{1-1}
6x^2 + 20x - 20 & \\
-6x^2 - 18x + 12 & \\ \cline{1-1}
2x - 8 &
\end{array}
$$

Como 2x no se puede dividir por x^2, la división se ha terminado. Entonces obtenemos que el polinomio cociente es:

$$c(x)=x^2-5x+6$$

y el polinomio resto es: $R(x)=2x-8$

ACTIVIDAD

Te proponemos que compruebes ahora que la división resuelta verifica la propiedad fundamental de la división: **D(x)=d(x)·c(x)+R(x)**

En el caso que R(x) sea igual a cero (el resto de la división sea igual a cero), la propiedad fundamental se puede expresar:
D(x)=d(x)·c(x)

En este caso se dice que:

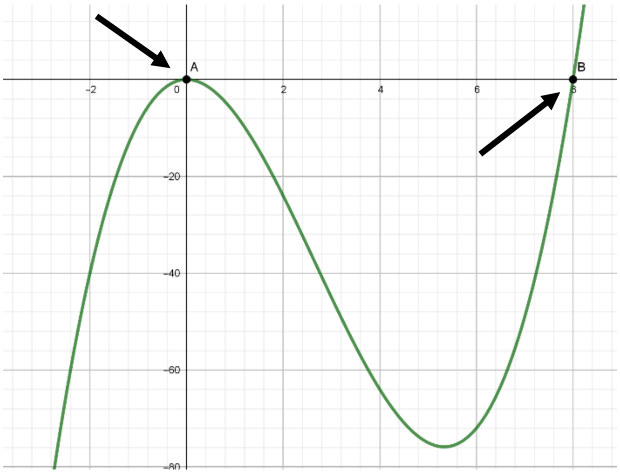
El polinomio d(x) divide a D(x) o que el polinomio D(x) es divisible por d(x)

Retomemos el concepto de raíces de un polinomio para ocuparnos de cómo se visualizan en el gráfico de una función polinómica y de su importancia en lo que se refiere a la **divisibilidad** de los polinomios

Un valor de x es raíz de P(x) si el polinomio se anula para ese valor.
x = a es raíz de P(x) sí y sólo sí P(a)= 0

Como hemos visto un polinomio en una determinada es una función polinómica. Por ejemplo, el polinomio P(x)= x^3- $8x^2$ tiene por **raíces a 0 y 8 porque P(0) = 0 y P(8)=0.**

El gráfico que aparece a continuación es de la función polinómica cuya fórmula es P(x).



Observen el gráfico de P(x)= x^3- $8x^2$.

“Las abscisas en las que el gráfico de la función polinómica tiene contacto con el eje x son las raíces del polinomio”

Teorema del resto

Realicemos la división entera de un polinomio P(x) por (x-*a*) , donde *a* es un número real. Como el divisor es de grado uno, puede ocurrir que el resto sea de grado cero o que sea el polinomio nulo. Es decir que el resto es un número, al que llamamos R.

Teniendo en cuenta el algoritmo de la división de polinomios y la propiedad fundamental de la división:

$$\begin{array}{l|l} P(x) & x - a \\ \cline{2-2} R & C(x) \end{array} \longrightarrow \quad P(x) = C(x) \bullet (x - a) + R(x) \qquad (I)$$

Si x= a, reemplazamos en (I) y resulta $P(a) = C(a) \bullet (a - a) + R(x) \longrightarrow$ **$P(a)$= R**
Entonces, **al dividir un polinomio P(x) por un polinomio de la forma (x-a), se obtiene como resto un número que es igual a P(a).** Esto es lo que afirma el teorema del resto:

> El resto de dividir un polinomio P(x) por un polinomio de la forma (x - a) es P(a).

Por ejemplo, si queremos saber el resto de la división P(x): Q(x) siendo:

$$P(x)= 2x^2+3x-2 \quad y \quad Q(x)= x-2$$

O sea, $(2x^2+3x-2): (x-2) =$

Aplicamos el teorema:
Identificamos en primer lugar "a", si es (x-**2**), en este caso **a= 2.** Luego calculamos el valor numérico del polinomio para **a= 2**

$$P(2) = 2.2^2+3.2-2=12$$

De este modo, observamos como **el resto de la división es 12**.

Lo comprobamos con el algoritmo tradicional:

$$\begin{array}{l|l} 2x^2 +3x -2 & x-2 \\ \cline{2-2} -2x^2+4x & 2x+7 \\ \hline 0+7x-2 & \\ \hline \quad -7x+14 & \\ \hline \qquad +12 & \end{array}$$

La constante a se llama raíz (o cero) de un polinomio P(x), cuando sustituida en lugar de la variable x, el valor numérico del polinomio es cero: P(a)=0. Como consecuencia inmediata del teorema del resto, tenemos **el Teorema del factor.**

☑ Teorema del factor

Una de las utilidades del **teorema del factor** es que sirve para encontrar los factores de un polinomio. El teorema afirma:

> Un valor a es un cero (o raíz) de un polinomio P(x), si y sólo si P(x) es divisible por x – a.

La división de un polinomio P(x) por un binomio (x – a),es:

$$P(x)= (x - a)\, C(x) + R$$

Pero por el teorema del resto R = P(a) y por ser raíz P(a)=0 ⇒R =0 ⇒ P(x)= (x – a) C(x) **(8)**

Entonces:

- **Si a es una raíz de P(x), (x – a) es un factor de P(x). Y viceversa, si (x – a) es un factor de P(x), entonces P(x) tiene la forma dada en (8)**

Conclusión: P(x) es divisible por (x – a) si y sólo si P(a) = 0, o sea, a es raíz de P(x).

Regla de Ruffini o división sintética

La regla de Ruffini es un método sencillo para dividir un polinomio cualquiera por un polinomio mónico de grado 1, o sea, por un polinomio de la forma (x - a).

Por ejemplo, la división: $(3x^3+13x^2-13x+2)$: (x-1)=

✓ En primer lugar, colocamos los coeficientes del dividendo en un fila. En este caso el polinomio es completo, si no fuera así completaría con ceros, 0.

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & 13 & -13 & +2 \\ & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

✓ Posteriormente, colocamos el valor de a. En caso que el divisor tenga la forma x + a se coloca el opuesto de a , o sea – a.

✓ En nuestro ejemplo, como es x – 1 , se coloca + 1

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & 13 & -13 & +2 \\ +1 & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

✓ Para empezar, bajamos el primer coeficiente.

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & 13 & -13 & +2 \\ +1 & & & & \\ \hline & 3 & & & \end{array}$$

- ✓ Multiplicamos ese coeficiente por el divisor y lo colocamos debajo del siguiente término.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & 13 & -13 & +2 \\ +1 & & +3 & & \\ \hline & 3 & & & \end{array}$$

- ✓ Sumamos los dos coeficientes.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & 13 & -13 & +2 \\ +1 & & +3 & & \\ \hline & 3 & +16 & & \end{array}$$

- ✓ Repetimos el proceso anterior y vamos completando paso a paso la tabla.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & 13 & -13 & +2 \\ +1 & & +3 & +16 & \\ \hline & 3 & +16 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & 13 & -13 & +2 \\ +1 & & +3 & +16 & \\ \hline & 3 & +16 & +3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & 13 & -13 & +2 \\ +1 & & +3 & +16 & +3 \\ \hline & 3 & +16 & +3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & 13 & -13 & +2 \\ +1 & & +3 & +16 & +3 \\ \hline & 3 & +16 & +3 & +5 \end{array}$$

Finalmente se escribe el polinomio Cociente y Resto:

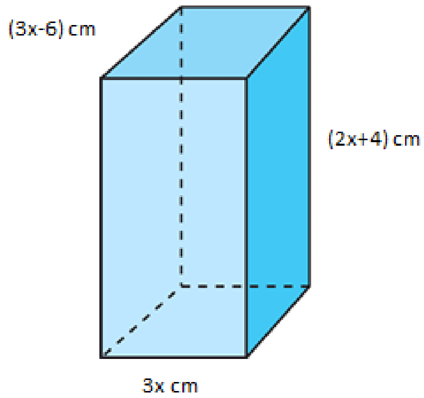
- El grado del cociente es una unidad inferior al grado del dividendo.
- El resto es siempre un número.

Así: $C(x)=3x^2+16x+3$ y $R(x)=5$

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

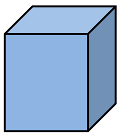
Te proponemos una situación problemática…

En una fábrica de zapatillas, para su nuevo producto "Correcaminos", necesitan construir cajas en forma de prisma rectangular y con las medidas como el de la figura:



¿Cuáles son las medidas posibles de cajas?

● Completamos la tabla con la información que disponemos:

Modelo		Ancho	Largo	Altura	Volumen
Prisma rectangular		3x	3x - 6	2x + 4	…………..

$$\mathbf{V_{prismarect.} = 3x.(3x-6)\ .\ (2x+4) = 18\ x3 - 72\ x}$$

Observamos que,en este caso, el volumen del prisma rectangulares un polinomiode tercer gradoen una indeterminada (x). El polinomio llamado V(x) está expresado como producto de polinomios o como suma de monomios.

● Calculamos el volumen de una caja cuyo largo es de 18 cm.

Si el largo es de 18 cm $\longrightarrow$ 3x – 6= 18

3x= 18 +6

…………

x = ……

Alto= …….. cm
Ancho= ……. cm
Largo= ……..cm

$$\mathbf{V_{prismarect.}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

- Calculamos el volumen de una caja cuyo ancho es de 6 cm

Si el ancho es 6 cm $3x = 6$

$x = 2$

Alto=….. cm
Ancho= ……. cm
Largo= ……..cm

$$V_{prismarect.} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

¿Es posible construir una caja cuyo ancho mide 6 cm? Indudablemente no es posible porque no es razonable en la realidadque el largo de la caja mida 0 cm y el volumen sea 0 cm^3.

La indeterminada x del polinomio $V_{(x)} = 3x.(3x-6).(2x+4) = 18x^3 - 72x$ no puede tomar cualquier valor cuando se utiliza el polinomio para resolver un problema de la vida real.

Esta situación nos lleva nuevamente a plantear la pregunta inicial del problema:

¿Cuáles son las medidas posibles de la caja?

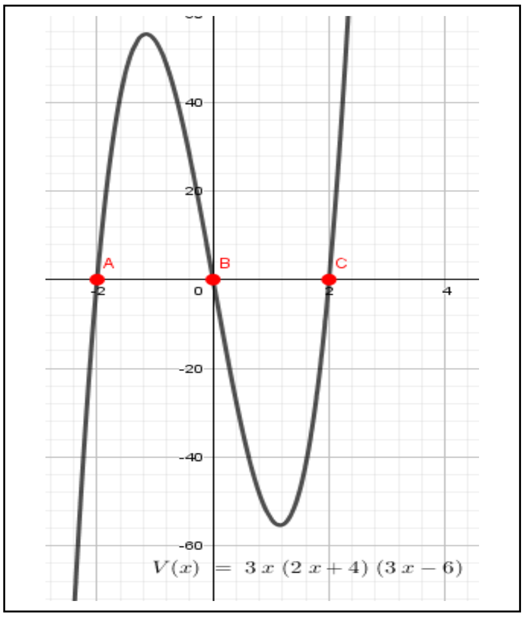
Para encontrar la respuesta recurramos a los conocimientos que nos brinda la Matemática.
Si pensamos en el polinomio V(x) en el plano matemático, no aplicado a un problema real, y calculamos el valor numérico para $x = 0$ y $x = -2$, obtenemos también 0.

$V(0) = 18.0^3 - 72.0 = 0$

$V(-2) = 18.(-2)^3 - 72.(-2) = 0$

Entonces $x= 2$, $x = -2$ y $x= 0$ son tres valores para los cuales el polinomio V(x) se anula, entonces son raíces de V (x).
Ahora veamos cómo se comporta gráficamente la función polinómica asociada al polinomio:

$$V_{(x)} = 3x.(3x-6).(2x+4) = 18x^3 - 72x$$



Observamos que la función polinómica V(x) toca al eje x en las tres raíces. También que para valores positivos de x comprendidos entre 0 y 2) la función toma valores numéricos negativos y para valores de x mayores a dos la función es positiva.

Ahora estamos en condición de dar respuesta a la pregunta del problema.

La función V(x) es el polinomio que expresa el volumen del prisma rectangular. Esta función toma valores positivos para x mayores que dos. En consecuencia, los valores de x posibles, por hacer que el volumen tome valores positivos, son los mayores a 2.

Conclusión

En esa fábrica deben **construir cajas que sean prismas rectangulares de ancho mayores de 6 cm (ojo: no igual a 6 porque en ese caso es x igual a 2 y anula el polinomio).**

Por otra parte, según lo visto en el **teorema del factor** , conociendo las raíces de V(x) se conocen los factores del polinomio, expresados de la forma x – a, siendo a la raíz. En este caso, como se sabe cuáles son las raíces se identifican tres factores: (x + 2) , (x -2) y x (porque es x-0).

Si observamos el polinomio expresado como producto $V_{(x)} = 3x.(3x-6).(2x+4)$, vemos que ésta es igual a la que resulta de extraer el máximo común divisor de cada factor:

$$\mathbf{V_{(x)} = 3x.(3x-6).(2x+4) = 3x \,.\, 3.\, (x-2)\,.\, 2\,.(x+2) = 18\, x\, (x+2).\, (x-2)}$$

El desarrollo realizado permite visualizar las raíces de V(x) en la expresión del polinomio escrito como producto.

$$\mathbf{V(x). = 18\, x^3 - 72\, x = 3x.(3x-6).(2x+4) = 18\, x\, (x+2).\, (x-2)}$$

- **Este proceso de transformar un polinomio expresado como suma de monomios (polinomio desarrollado) como producto de polinomios mónicos primos se llama FACTORIZACIÓN**

Polinomios primos: son los polinomios de grado no nulo que no pueden descomponerse como producto de otros polinomios de grado positivo menor. Solamente son primos los polinomios de grado uno y los de grado dos sin raíces reales. Un polinomio que no es primo, es compuesto. **Todos los polinomios de grado impar mayor que uno son compuestos.**

Factorización de polinomios: un polinomio está factorizado cuando se lo ha expresado como el producto entre su coeficiente principal y polinomios mónicos primos. Un polinomio de grado *n* con *n* raíces reales se factoriza así: $\boldsymbol{P(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \dots\dots\dots (x - r_n)}$

a_n es el coeficiente principal de P(x)
r_1, r_2, r_3, ……..r_n son las raíces reales de P(x)

Para ayudar a la comprensión se presentan algunos ejemplos:

Polinomio desarrollado	Polinomio factorizado
P(x)= 3x + 9	P(x)= 3 (x + 3)
R(x)= $\mathbf{-2x^2 - 10x - 12}$	R= $-2(x+2)(x+3)$
Q(x)= $\mathbf{4x^3 - 4x^2 - 32x + 48}$	Q(x)=$4(x+3)(x-2)^2$

Más adelante se desarrollan algunas técnicas de factorización de polinomios.

Teorema fundamental del álgebra (TFA)

Recordemos que un valor de x es raíz de P(x) si el polinomio se anula para ese valor. Además, si P(x) está expresado como producto de otros polinomios, las raíces de éstos son las raíces de P(x).

Observen los siguientes ejemplos, cuyos polinomios son de tercer grado y están expresados como productos (para verificar el grado de los polinomios pueden realizar las multiplicaciones).

Polinomio expresado como producto	Raíces reales	Cantidad de raíces reales
$P(x) = (x-1).(x-2).(x+3)$	x=1, x=2 , x= - 3	Tres
$Q(x) = (x+2).(x-1).(x-1)$	x=-2 x=1 (raíz doble)	Tres
$R(x) = (x+5).(x+5).(x+5)$	x= - 5	Tres
$S(x) = (x-8).(x^2+1)$	x= 8	Una

Si al escribir un polinomio como producto hay más de un factor que tiene la misma raíz, a ésta se la llama **raíz múltiple**. Podríamos decir:

Una **raíz múltiple** de un polinomio es una raíz que ocurre más de una vez.

En la tabla anterior, en el polinomio Q(x), el factor (x-1) aparece dos veces, por eso x = 1 es raíz doble (se cuentan como dos raíces). En el polinomio R(x), el factor (x+5) aparece tres veces, entonces x= -5 es raíz triple (se cuentan como tres raíces). La cantidad de veces que se repite una raíz es el orden de multiplicidad de la misma.

Se llama **orden de multiplicidad de una raíz** a la cantidad de veces que la **raíz** se repite como tal.

En la tabla figuran **raíces reales**, pero un polinomio puede tener **raíces reales** y **raíces no reales** (como S(x)). Existe un teorema, llamado **teorema fundamental del álgebra (TFA)**, a partir del cual podemos afirmar que un polinomio de grado n tiene exactamente n raíces, considerando las reales y no reales.

Otra consecuencia de este teorema es la siguiente:

Un polinomio de grado n tiene como máximo n raíces

ACTIVIDAD

Completar:

Los polinomios de grado uno tienen…………raíz real, los de grado dos tienen hasta ………… raíces reales y los de grado tres tienen hasta …….raíces reales.

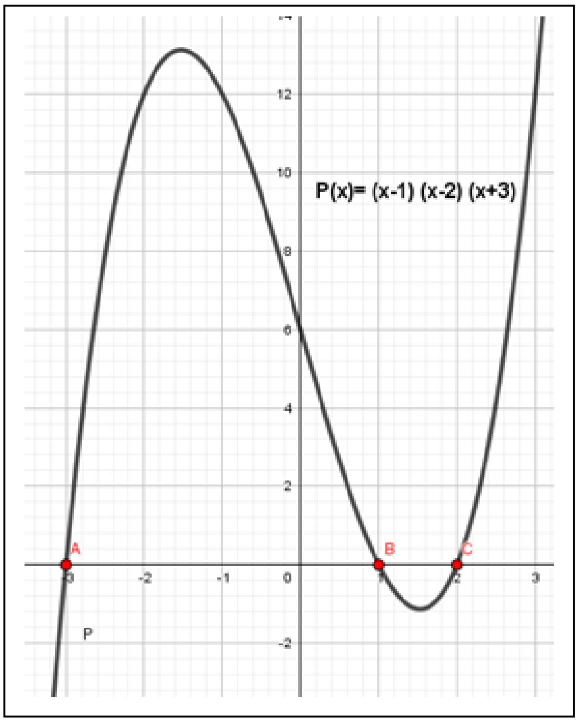
Raíces	P(x) de grado tres	
Reales	……	…..
No reales	0	……
Total		

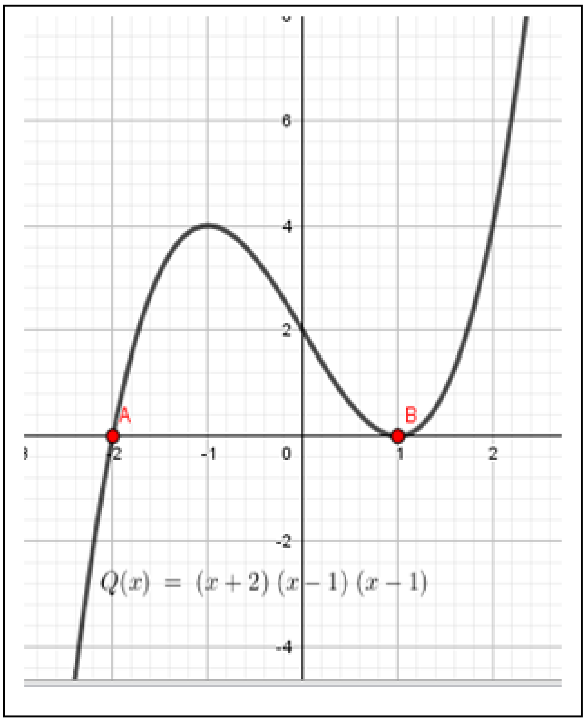
Las raíces no reales de un polinomio siempre vienen en parejas. Por eso, un polinomio de grado tres puede tener una raíz real y dos raíces……………, o bien, tener tres raíces ……………………..

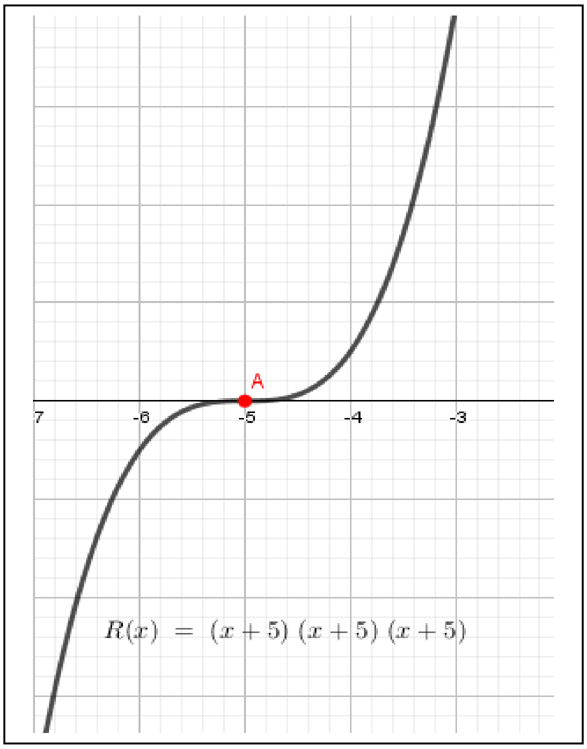
Podemos enunciar otra consecuencia del TFA:

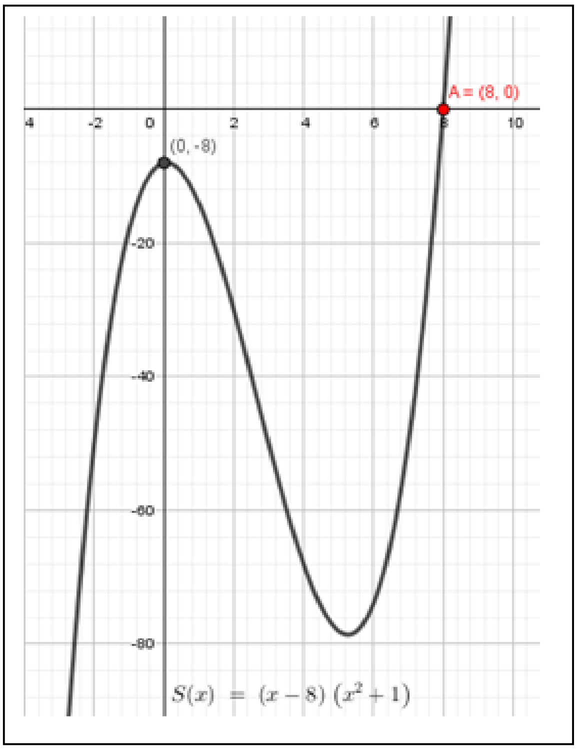
Un polinomio de grado impar tiene como …………………. una raíz real, es decir que su gráfico siempre tendrá contacto con el eje x.

Si graficáramos las funciones asociadas a cada uno de los polinomios nos quedan los siguientes









En todas las gráficas, las raíces de las funciones polinómicas son las abscisas de los puntos en los que la función tiene contacto con el eje x.

En el caso de la función P(x), las tres raíces son simples (cada una aparece en la fórmula una sola vez) y la curva atraviesa al eje x en cada una de ellas. En la función Q(x) está la raíz doble (-1), en que la curva toca al eje x pero "revota" (no la atraviesa) y la raíz simple (- 2) en la que la curva corta. En la función R(x) se observa la raíz triple (-5) y la curva que atraviesa el eje x. Por último, está la función S(x) con una raíz simple en 8.

A partir de la descripción realizada podemos decir:

- **Si el orden de multiplicidad de la raíz es PAR, la gráfica de la función toca el eje x pero no lo atraviesa ("rebota")**
- **Si el orden de multiplicidad de la raíz es IMPAR, la gráfica de la función atraviesa el eje x, CORTA**.
- **Entre dos raíces consecutivas, los valores que toma el polinomio son todos valores positivos o todos negativos**.
- **El gráfico atraviesa el eje y en el valor del término independiente**.

Si deseamos conocer la multiplicidad de una raíz, debemos controlar que el polinomio esté factorizado. Por ejemplo, erróneamente podríamos creer que x = - 6 es raíz cuádruple del polinomio $Q(x) = (x + 6)^4.(x^2 + x - 30)$.
Pero Q(x) no está factorizado. Al factorizar el factor $(x^2 + x - 30)$, obtenemos:

$$(x^2 + x - 30) = (x + 6).\,(x-5)$$

Entonces $Q(x) = (x + 6)^4 \,.\, (x + 6).\,(x - 5) = (x + 6)^5 \,.\, (x - 5)$

Ahora Q(x) está factorizado y podemos ver que x = - 6 es raíz quíntuple de P(x).

Cálculo de raíces de polinomios

Este procedimiento (ojo: no es el único), nos permite calcular las raíces de un polinomio cuando el polinomio es escrito como suma de monomios.

Por ejemplo, el polinomio del ítem anterior:

$$P(x) = (x - 1).\,(x - 2).\,(x + 3)$$

A partir de la gráfica observamos que este polinomio tiene tres raíces: 1, 2 y menos 3. Este polinomio P(x) escrito como suma de monomios es: $P(x) = x^3 - 7x + 6$

El procedimiento es el siguiente:

- Se halla por el "método de prueba y error", una de las raíces de P(x) , por ejemplo $r_1 = 1$
- Se divide P(x) por $(x - r_1)$

  $$P(x) = (x - r_1)\,.\,c_1, \text{ con } c_1 = x^2 + x - 6$$

  c_1 es el cociente que resulta de la división.

  Si realizas la división comprobarás que c_1 es el cociente

- Se hallan las raíces de $c_1 = x^2 + x - 6$ y se obtiene $r_2=2$ y $r_3= -3$

  Estas raíces se pueden calcular planteando la ecuación $x^2 + x - 6 = 0$ y utilizando la fórmula resolvente (es una ecuación cuadrática)

Este procedimiento, en cada paso, permite disminuir en una unidad el grado del polinomio al que se le calculas las raíces.

En general, para polinomios de grado ≥ 3 se puede utilizar este procedimiento repitiendo los pasos tantas veces como sea necesario.

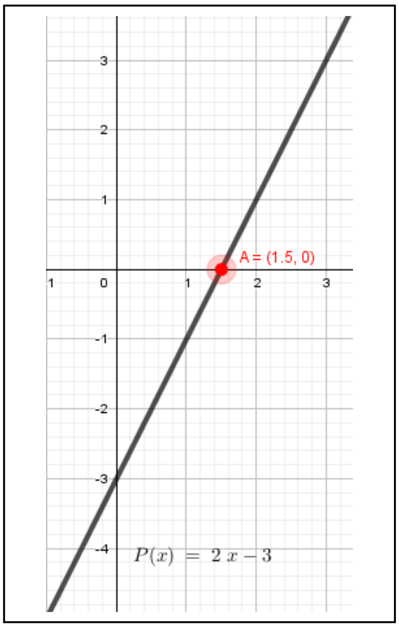
En este ejemplo, como en varios otros ejemplos, resulta fácil encontrar una de las raíces de los polinomios por el método de "prueba y error". Pero esto no es lo que ocurre en la mayoría de los casos.

Raíces de polinomios de grado uno y dos

Para hallar la única raíz de un polinomio de grado uno, es decir de un polinomio de la forma P(x)= ax + b, plantearemos la ecuación a x + b = 0 y despejamos x, entonces $x = -\frac{b}{a}$

Ejemplo: $P(x) = 2x - 3 \Longrightarrow 2x - 3 = 0 \Longrightarrow x=$ ……………..es raíz de la ecuación.

El gráfico de la función polinómica asociada al polinomio P(x) es la recta cuya gráfica es la siguiente:



En la gráfica se puede visualizar la única raíz de P(x), que es el valor de la abscisa del punto A en que corta la recta al eje x. La raíz es $x = \frac{3}{2}$

Para hallar las raíces de x_1 y x_2 de un polinomio de segundo grado, es decir, de un polinomio de la forma $P(x)= ax^2 + bx + c$, resolveremos la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ aplicando la fórmula resolvente.

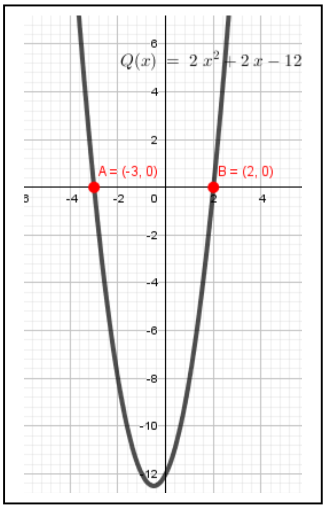
Fórmula resolvente

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si las raíces son reales podemos escribir el polinomio en forma de producto: $P(x) = a\,(x- x_1)\,(x-x_2)$

Ejemplo: $Q(x) = 2x^2 + 2x - 12 \Longrightarrow 2x^2 + 2x - 12= 0 \Longrightarrow$ aplicando la fórmula resolvente las raíces son $x_1 =$ ………… y $x_2 =$ ………….$\Longrightarrow$ Q(x) puede escribirse en forma de producto así: $Q(x) = 2(x-2)(x+3)$

En este caso, como el polinomio es de segundo grado, el gráfico de la función polinómica asociada es una parábola cuyas raíces son $x_1 =2$ y $x_2 =-3$.



A continuación se desarrolla un teorema para hallar las **raíces racionales de polinomios con coeficientes enteros**.

Utilizando este teorema es posible conocer cuáles son todas las **POSIBLES** raíces racionales de un polinomio, cualquiera sea su grado, **SIEMPRE QUE TENGA COEFICIENTES ENTEROS.**

Teorema de Gauss

Dado un polinomio de coeficientes enteros, si el número racional **r** es una raíz del polinomio, $r = \frac{p}{q}$ con p y q enteros y $q \neq 0$, siendo $\frac{p}{q}$ una fracción irreducible, entonces p divide al término independiente (a_0) y q divide al coeficiente principal (a_n).

Por ejemplo, dado el polinomio $P(x) = 2x^3 + 2x^2 + 3x + 3$, hallar si existen raíces racionales.
Este polinomio tiene coeficientes enteros, por lo tanto, se puede aplicar el teorema de Gauss.

Por este teorema, si $\frac{p}{q}$ es una raíz de este polinomio, entonces p es divisor de 3 y q es divisor de 2, por lo que resulta:

$$p = \begin{cases} \pm 1 \\ \pm 3 \end{cases} \quad \text{y} \quad q = \begin{cases} \pm 1 \\ \pm 2 \end{cases} \quad ; \quad \text{luego}, \ \frac{p}{q} = \begin{cases} \pm 1 \\ \pm 3 \\ \pm \frac{3}{2} \\ \pm \frac{1}{2} \end{cases}$$

Después, se debe comprobar si los valores obtenidos son raíces del polinomio P(x).

Comenzamos con x= 1

$P(1) = 2.1^3 + 2.1^2 + 3.1 + 3 = 2 + 2 + 3 + 3 \neq 0$

ACTIVIDAD

Te proponemos que compruebes qué ocurre con las otras posibles raíces.

Luego de hacer la comprobación con todas las posibles raíces verán que "P(x) tiene una única raíz racional: r = -1".

Si **r** es una raíz racional de P(x), entonces, debe verificar las condiciones enunciadas en el teorema, pero no todo número racional que cumpla con esas condiciones es raíz del polinomio. Por ejemplo, 1 , -1, 3 y -3 verifican las condiciones del teorema; sin embargo, sólo -1 es raíz racional del polinomio, Este teorema, sólo permite hallar las **raíces racionales.**

Ahora se desarrollan algunas técnicas para factorizar un polinomio

Técnicas de factorización

● **Factor común**

Conviene aplicar esta técnica cuando la indeterminada x figura en todos los términos del polinomio. Se extrae la x elevada a la menor potencia con que figure. También se puede extraer un número que es factor en todos los coeficientes de los términos del polinomio.
Se divide cada término del polinomio por el factor común.

Ejemplo 1:

Cuando hay factor común entre los coeficientes de los términos.

$$E(x)= 2x^2 + 16= 2(x^2+8)$$

En este caso el factor siempre es el Máximo Común Divisor (MCD) entre los números. En este ejemplo el MCD de 2 y 16 es 2.

Ejemplo 2:

Hay factor común en la indeterminada

$$R(x) = 7x^2 + 11x^3 - 4x^5 + 3x^4 - x^8 = x^2. (7 + 11x - 4x^3 + 3x^2 - x^6)$$

El factor común es x^2: La x elevada a la menor potencia con que aparece.

Ejemplo 3:

Hay factor común en coeficientes e indeterminada de los términos

$$F(x) = 9x^3 - 6x^2 + 12x^5 - 18x^7 = 3x^2. (3x - 2 + 4x^3 - 6x^5)$$

Ejemplo 4:

$$R(x) = 3x (5x – 6) + 4 (5x – 6) = (5x – 6) (3x + 4)$$

El factor común es $(5x – 6)$.

Siempre podemos verificar que el producto que obtuvimos utilizando esta técnica es correcto, aplicando la propiedad distributiva. $\mathbf{a \cdot b + a \cdot c - a \cdot d = a (b + c - d)}$

- **Factor común por grupos**

Se aplica cuando P(x) puede separarse en grupos de igual cantidad de términos, de modo tal que cada uno de ellos tenga un factor común. Luego, debe haber un factor común en todos los grupos, que se vuelva a extraer.

Ejemplo:

$$P(x) = 4x^2 + 4 + 3x^3 + 3x =$$

$$P(x) = (4x^2 + 4) + (3x^3 + 3x) =$$

$$P(x) = 4.(x^2 + 1) + 3x. (x^2 + 1) =$$

$$P(x) = (x^2 + 1) .\mathbf{(4 + 3x)}$$

Primero agrupo los términos que saco factor común. Saco factor común "4" en el primer y segundo término; y factor común "3x" en el tercer y cuarto término. Los dos "resultados" son iguales: $(x^2 + 1)$. Luego, saco como factor común a $(x^2 + 1)$.

- **Diferencia de cuadrados**

Cuando P(x) es una resta de dos términos y cada uno de ellos está elevado a una potencia par, la fórmula que se aplica es la que expresa que la diferencia de cuadrados es igual a suma por diferencia:

$$\mathbf{a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)}$$

Ejemplo:

Descomponer en factores y hallar las raíces

$$L(x) = x^2 - 49$$

$$L(x) = \mathbf{(x - 7) \cdot (x + 7)}$$

Trinomio cuadrado perfecto

Se aplica cuando se tiene un trinomio de grado par, con dos términos que son cuadrados perfectos y un término que es el doble del producto de las raíces de los otros dos. Las fórmulas que se aplican son:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 \qquad a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

Ejemplo 1:

$$L(x) = \underbrace{x^2}_{x^2} + \underbrace{6x}_{2.3.x} + \underbrace{9}_{3^3} = (x+3)^2$$

Tenemos que preguntarnos:

- ✓ Qué número elevado al cuadrado da x^2: x
- ✓ Qué número elevado al cuadrado da 9: 3
- ✓ Y tenemos que comprobar que $2 \cdot 3 \cdot x = 6x$
- ✓ La raíz es $x = -3$, y se dice que es una **raíz doble**.

Ejemplo 2:

$$S(x) = x^8 - 12x^4 + 36 = (x^4 + 6)^2$$

Trinomio de la forma $P(x) = ax^2 + bx + c$

Si el polinomio es un trinomio que no cumple las condiciones de trinomio cuadrado perfecto, se puede recurrir al siguiente teorema

Teorema: Cualquier polinomio cuadrático $P(x) = ax^2 + bx + c$, con a, b y c números reales, para los cuales $b^2 - 4ac \geq 0$, puede factorizarse como:

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Donde $x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ y $x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Este teorema puede verificarse por medio de la multiplicación directa

Ejemplo 1: Factoriza $-3x^2 + 3x + 6$

Se calculan las raíces, planteando la ecuación: $-3x^2 + 3x + 6 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4.(-3).6}}{2.(-3)} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+72}}{-6} = \frac{-3 \pm \sqrt{81}}{-6} = \frac{-3 \pm 9}{-6}$$

Entonces las raíces son: $x_1=2$ y $x_2=-1$

luego se factoriza $P(x) = -3x^2 + 3x + 6 = -3\,(x-2)\,[x-(-1)] = -3\,(x-2)(x+1)$

Cuatrinomio cubo perfecto

Se aplica cuando se tiene un polinomio de cuatro términos. Un cuatrinomio cubo perfecto tiene la siguiente forma:

$$\mathbf{P(x)= a^3 \pm 3\cdot a^2\cdot b + 3\cdot a\cdot b^2 \pm b^3}$$

Este cuatrinomio es el resultado de aplicar la propiedad distributiva al cubo del binomio: $(a \pm b)^3$

Así, las fórmulas que se aplican son:

$$\mathbf{(a + b)^3 = a^3 + 3\cdot a^2\cdot b + 3\cdot a\cdot b^2 + b^3}$$

$$\mathbf{(a - b)^3 = a^3 - 3\cdot a^2\cdot b + 3\cdot a\cdot b^2 - b^3}$$

Ejemplo 1:

$$L(x) = x^3 - 9x^2 + 27x - 27 = \mathbf{(x - 3)^3}$$

$x^3 \rightarrow \mathbf{(x)^3}$

$-9x^2 \rightarrow \mathbf{3.x^2.(-3)} \rightarrow \mathbf{-9x^2}$

$27x \rightarrow \mathbf{3.x.(-3)^2} \rightarrow \mathbf{27x}$

$-27 \rightarrow \mathbf{(-3)^3}$

Las bases son x y -3, ya que $(-3)^3$ es igual a -27. Y los dos "triple-productos" dan bien. El resultado es $(x + (-3))^3$, que es igual a $(x - 3)^3$

Ejemplo 2:

$$M(x)= 125x^6 + 150x^4y + 60\,x^2y^2 + 8y^3$$

- ✓ Como se observa el primer y cuarto término son cubos

$(5x^2)^3 = 125x^6$ $\qquad$ $(2y)^3 = 8y^3$

- ✓ Entonces los posibles términos del binomio son $5x^2$ y $2y$, ahora hay que verificar las otras dos condiciones

Luego, los dos triples-productos:

$3.\,(5x^2)^2 2y = 150\,x^4y$ $\qquad$ $3.\,5x^2\,(2y)^2 = 60\,x^2y^2$

Entonces: $125x^6 + 150x^4y + 60\,x^2y^2 + 8y^3 = (5x^2+2y)^3$

Suma o diferencia de potencias de igual exponente

- ✓ **Sumas de potencias de exponente impar:** $\mathbf{x^n - a^n}$ **; n impar**

Ejemplo 1: $P(x)= x^3 + 8 = x^3 + 2^3$

¿Para que valor de x se hace cero la expresión anterior? $x = -2$

Es decir – 2 es una raíz de P(x) $\Longrightarrow$ (x + 2) un factor de P(x) $\Longrightarrow$ P(x) es divisible por (x + 2) $\Longrightarrow$ el resto de $(x^3 + 8) : (x + 2)$ es igual a cero.

Por la propiedad fundamental de la división $x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x+2).\underbrace{C(x)}_{\text{Cociente de la división}}$

Para hallar C(x) se aplica Ruffini, entonces se completa el polinomio:

$$P(x)=1\,x^3 + 0\,x^2 + 0\,x + 8$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & 8 \\ -2 & & -2 & 4 & -8 \\ \hline & 1 & -2 & 4 & 0 \end{array} \longrightarrow \text{Resto}$$

$C(x) = x^2 - 2x + 4$

Reemplazando C(x) en la propiedad fundamental queda:

$$x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x+2).\,C(x) = (x+2).\,(x^2 - 2x + 4)$$

$$\boxed{\mathbf{x^3 + 8 = (x+2).\,(x^2 - 2x + 4)}} \longrightarrow \text{Polinomio factorizado}$$

Ejemplo 2: $M(x) = x^5 + 32 = x^5 + 2^5$

Haciendo el procedimiento del ejemplo 1 queda M(x) factorizado:

$$M(x) = x^5 + 32 = (x+2).\,(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16)$$

Los otros casos posibles de sumas y diferencias de potencias de igual exponente son:

- ✓ **Diferencia de potencias de exponente impar: $x^n - a^n$; n impar**
- ✓ **Sumas de potencias de exponente par: $x^n + a^n$; n par**
- ✓ **Diferencia de potencias de exponente par: $x^n - a^n$; n par**

ACTIVIDAD

a) Utilizando el procedimiento del caso presentado en **Suma o diferencia de potencias de igual exponente,** completar el cuadro:

Casos	Proponer un polinomio de este caso.	Polinomio propuesto en su forma factorizada	¿Es posible factorizar? Completar con SI o NO
Diferencia de potencias de exponente impar			
Sumas de potencias de exponente par			
Sumas de potencias de exponente par			

b) ¿Todos los casos de polinomios expresados como **Suma o diferencia de potencias de igual exponente** fueron posibles factorizar?

□ **Factorización de polinomios utilizando más de una técnica.**

Si bien las técnicas de factorización de polinomios fueron tratadas de manera separada, en la factorización se puede utilizar más de una técnica para lograr expresar a un polinomio como producto de polinomios primos. Van algunos ejemplos.

✓ Ejemplo 1:

En este ejemplo se utilizan dos técnicas: Factor Común y Diferencia de Cuadrados

$P(x)= 2x^2 - 18 = 2.(x^2 - 9) = \mathbf{2.(x + 3).(x - 3)}$

✓ Ejemplo 2:

En este ejemplo se utilizan dos técnicas: Factor Común y Trinomio Cuadrado Perfecto

$L(x)= 3x^2 + 30x + 75 = 3.(x^2 + 10x + 25) = \mathbf{3.(x + 5)^2}$

✓ Ejemplo 3:

En este ejemplo se utilizan dos técnicas: Factor Común y Suma o Resta de Potencias de Igual Grado

$R(x) = 5x^3 + 40 = 5.\ (x^3 + 8) = \mathbf{5.(x + 2).(x^2 - 2x + 4)}$

✓ Ejemplo 4:

En este ejemplo se utilizan dos técnicas: Suma o Resta de Potencias de Igual Grado y Factor Común en Grupos.

$S(x)= x^4 - 81 = (x - 3).(x^3 + 3x^2 + 9x + 27) = (x - 3).[x^2.(x + 3) + 9.(x + 3)] = \mathbf{(x - 3).(x + 3).(x^2 + 9)}$

<u>FUNCIÓN POLINÓMICA DE PRIMER Y DE SEGUNDO GRADO</u>

Anteriormente hemos realizado un desarrollo general de las funciones polinómicas. Entre ellas hemos visto las funciones polinómicas de primer y segundo grado, cuyas forma general son $f(x) = a_1x + a_0$ y $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ respectivamente.

En este apartado nos ocupamos de analizar a partir de casos particulares cómo se comportan las curvas que determinan la gráfica de este tipo de funciones y la relación entre la gráfica y la fórmula.

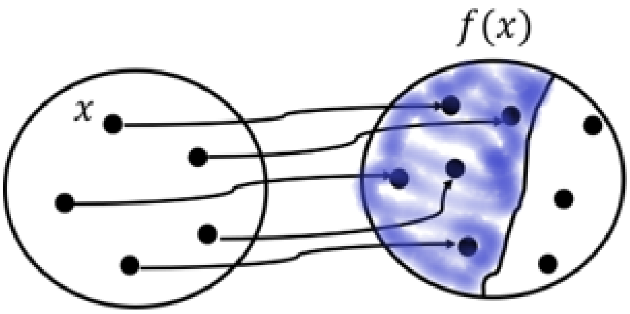
Antes de iniciar el repaso de función polinómica de primer grado, también conocida como función lineal, te recuerdo la definición de función.

Definición de función

Una función **f** queda determinada por:

- ✓ Un conjunto A llamado **dominio**
- ✓ Un conjunto B llamado **codominio**
- ✓ Una ley que asocia a cada elemento ***x*** del conjunto A a un único elemento ***y*** del conjunto B.

Para tener en cuenta: Una **ley de correspondencia** no siempre se puede expresar a través de una fórmula. Puede estar dada en forma verbal, a través de un gráfico, de una tabla de valores.



Cuando se hace referencia a variables en las funciones, en general se utiliza: f para la función, x para la variable independiente y para la variable dependiente.

$$x \xrightarrow{f} y = \text{f}(x)$$

Los elementos de una función tienen la forma de un par ordenado

(x , y)

Valores del dominio (A)

Valores del codominio (B)

Si el par (a, b) $\in f$ diremos que b es la imagen de a por f y suele escribirse $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$

Función polinómica de primer grado o Función lineal

La función polinómica de primer grado o función lineal es aquella cuya forma general es:

$$\boldsymbol{f(x) = a_1 x + a_0}$$

Se la suele expresar de esta manera $\boldsymbol{f(x) = ax + b}$ o también así: $\boldsymbol{y = ax + b}$

- ✓ El dominio de la función lineal es siempre el conjunto **R**.
- ✓ Reconocemos una función polinómica de primer grado porque el mayor de los exponentes a los que aparece elevada la variable independiente x es 1.
- ✓ Su representación gráfica es una recta.

Repasaremos conceptos vinculados a la función lineal a partir de ejemplos.

Ejemplo 1: Dada la siguiente función $f(x) = 2x + 4$

a) Determinar el dominio e Imagen.
b) Indicar la pendiente.
c) Indicar la ordenada al origen.
d) Determinar el valor en que la recta corta al eje x.
e) Hallar el valor el valor de x cuya imagen a través de la función f es igual a 2.
f) Representar gráficamente la función.

Vamos desarrollando algunos conceptos a medida que damos respuesta a cada consigna del ejemplo 1. Comencemos.

a) Para determinar el dominio de la función dada se debe recurrir a la definición de dominio presentada anteriormente.

> El **dominio** de una función f es el conjunto que contiene a todos los valores que puede tomar la variable independiente (x).

En las funciones lineales, salvo que se plantee alguna restricción específica, el dominio es **R** porque es el conjunto numérico más amplio para el cual tiene sentido la fórmula $f(x) = 2x + 4$.

En forma simbólica y en el ejemplo 1: $\boldsymbol{Domf}: \boldsymbol{R}$

> El conjunto formado por todas las imágenes de los elementos del dominio de $\boldsymbol{f}$ se llama **imagen de $\boldsymbol{f}$** Es decir que son los todos valores que puede tomar la función.

En forma simbólica y en el ejemplo 1: $\boldsymbol{Imf}: \boldsymbol{R}$

b) Antes de indicar el valor de la **pendiente**, recordemos a qué se llama pendiente de una recta.

Llamamos **pendiente** de una recta al aumento o a la disminución de la variable ***y*** por cada aumento unitario de la variable ***x***.

De acuerdo con el ejemplo 1, cada vez que la variable ***x*** aumenta una unidad la variable ***y*** aumenta dos unidades.
So observamos la fórmula $f(x) = 2x + 4$, **la pendiente es el número que multiplica a la variable *x* .**
En forma simbólica:

$$f(x) = \underbrace{a}_{\text{Pendiente}}x + b$$

En el ejemplo1: el valor de **la pendiente es 2**

- *Si la pendiente es positiva la función es creciente*
- *Si la pendiente es negativa la función es decreciente*
- *Si la pendiente es cero, la función es constante.*

c) Antes de indicar la **ordenada al origen,** recordemos a qué se llama ordenada al origen.

La **ordenada al origen** es el punto en que la recta corta al eje *y*. Es la imagen del cero y hallar se plantea $f(0) = a \cdot 0 + b = \boldsymbol{b}$

En el ejemplo 1: $f(0) = \mathbf{2}.0 + 4 = \mathbf{4}$ **; 4 es la ordenada al origen.**

d) Según lo visto en el apartado anterior, para determinar el punto en que la recta corta al eje *x* debemos hallar la raíz de ***f*** .

Un valor de *x* es raíz de ***f*** si la función se anula para ese valor. **Las abscisas en las que el gráfico de la función polinómica tiene contacto con el eje *x* son raíces del polinomio asociado a esa función.**

Entonces planteamos la ecuación lineal $f(x) = 0$

$$2x + 4 = 0$$
$$2x = -4$$
$$x = (-4):2$$
$$x = -2$$

Es decir que la recta del ejemplo 1 corta al eje *x* en el punto de coordenadas $(-2; 0)$

e) Para hallar el valor el valor de x cuya imagen a través de la función f es igual a 2, debemos tener en cuenta que $f(x) = 2$. Así queda planteada la siguiente ecuación lineal:

$$2x + 4 = 2$$

$$2x = 2 - 4$$

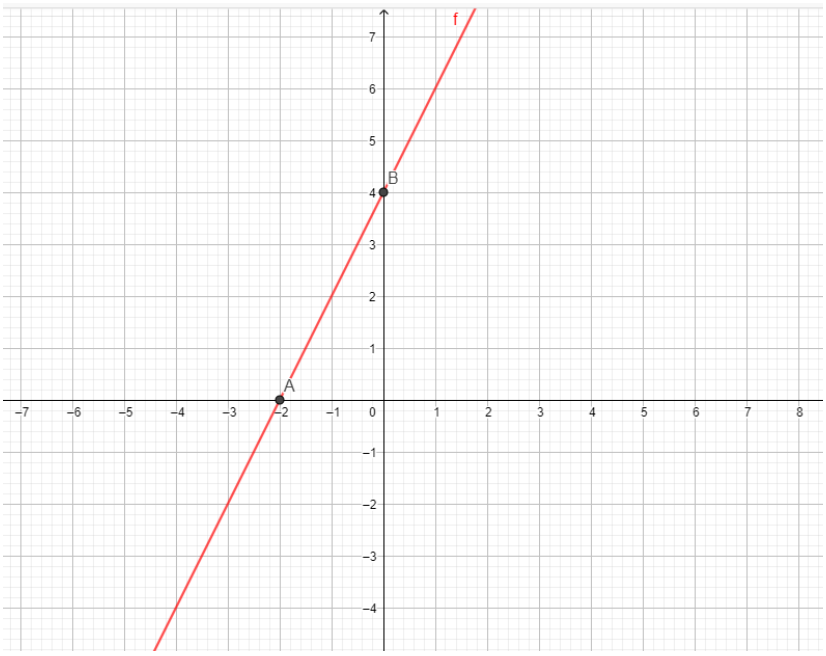
$$x = (-2) \div 2$$

$$\boldsymbol{x = -1}$$

Es decir que -1 tiene por imagen a 2 por la función *f*.

f) Representar gráficamente $f(x) = 2x + 4$

Considerando los datos que surgen del análisis realizado, la gráfica es la siguiente:



El siguiente ejemplo, nos permitirá analizar cómo hallar la fórmula de una función y su gráfica, dados dos puntos situados sobre la recta.

✓ **Fórmula y gráfica de la función, dados dos puntos situados sobre la recta**

Ejemplo 2: Escribir la fórmula de la función lineal que pasa por los puntos $P = (-1; 3)$ y $Q = (2; -3)$

Para hallar la fórmula de la función lineal $f(x) = \boldsymbol{a}x + b$ debemos calcular la pendiente de la recta y la ordenada al origen.

Para calcular la pendiente con los datos que tenemos debemos tener en cuenta el siguiente concepto teórico:

Supongamos que $P = (x_1; y_1)$ y $Q = (x_2; y_2)$ son dos puntos diferentes de la recta correspondiente al gráfico de la función lineal; entonces, podemos calcular la pendiente como:

$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{y_2 - y_1}}{\boldsymbol{x_2 - x_1}}$$

Mide el cambio en el eje *y*

Mide el cambio en el eje *x*

Reemplazando con los datos del ejemplo 2, queda:

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathbf{-3 - 3}}{\mathbf{2 - (-1)}} = \frac{\mathbf{-6}}{\mathbf{3}} = \mathbf{-2}$$

Como el valor de la pendiente es negativo la función es decreciente

La fórmula queda hasta ahora $f(x) = -2x + \boldsymbol{b}$. Para calcular la ordenada al origen ($\boldsymbol{b}$), basta con reemplazar las coordenadas de cualquiera de los dos puntos dados como datos (ya que al pertenecer a la recta deben verificar la fórmula).

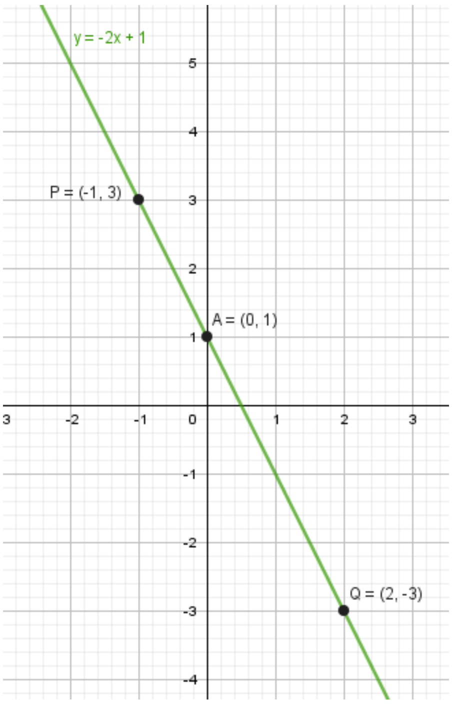
Tomamos el punto $P = (-1; 3)$ y reemplazamos en la fórmula, quedando la ecuación lineal:

$$-2.(-1) + \boldsymbol{b} = 3$$

$$2 + \boldsymbol{b} = 3$$

$$\boldsymbol{b} = 3 - 2 = \mathbf{1}$$

Finalmente, la fórmula buscada es $\boldsymbol{f(x) = -2x + 1}$ **y** la gráfica:



Observar que en el gráfico se encuentran los datos presentados en el ejemplo 2.

Como la gráfica de la función lineal es una recta, la fórmula de dicha función también es la ecuación de esa recta. Esto indica hallamos la ecuación de una recta asociada a una función, esa ecuación también es la fórmula de la función. Veamos entonces cómo hallar la ecuación de una recta que pasa por dos puntos.

✓ Ecuación de una recta que pasa por dos puntos

Para hallar la ecuación de una recta que pasa por dos puntos dados, se puede utilizar la siguiente expresión o fórmula:

Sean $P = (x_1; y_1)$ y $Q = (x_2; y_2)$ dos puntos de un recta, la ecuación de la recta que pasa por esos puntos es:

$$\boldsymbol{\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

Utilicemos esta fórmula con las coordenadas de los puntos dados en el ejemplo 2:

$$P = (-1; 3) \text{ y } Q = (2; -3)$$

Considerando a P con las coordenadas $(x_1; y_1)$ y a Q con las coordenadas $(x_2; y_2)$:

$$\boldsymbol{\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

$$\boldsymbol{\frac{y - 3}{x - (-1)} = \frac{-3 - 3}{2 - (-1)}}$$

$$\boldsymbol{\frac{y - 3}{x - (-1)} = \frac{-3 - 3}{2 - (-1)}}$$

$$\boldsymbol{\frac{y - 3}{x - (-1)} = -2}$$

$$\boldsymbol{y - 3 = -2 \cdot (x + 1)}$$

$$\boldsymbol{y - 3 = -2x - 2}$$

$$\boldsymbol{y = -2x - 2 + 3}$$

$$\boldsymbol{y = -2x + 1}$$

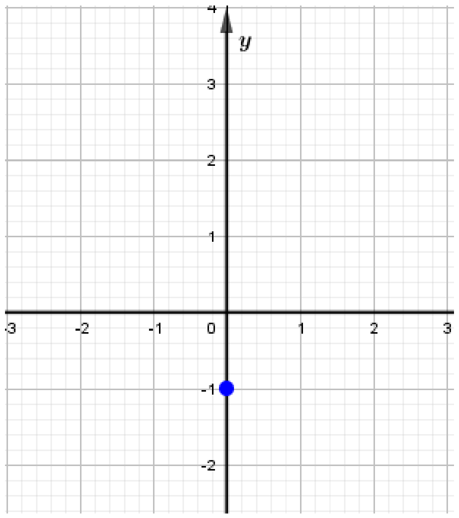
Coincide con la fórmula hallada con el procedimiento anterior.

Queda el desafío de verificar que la ecuación obtenida es la misma, $\boldsymbol{y = -2x + 1}$, considerando a Q con las coordenadas $(x_1; y_1)$ y a P con las coordenadas $(x_2; y_2)$.

- **Construcción rápida de la gráfica de una función lineal, dadas su pendiente y su ordenada al origen.**
  A continuación se presenta una serie de tres pasos que permite graficar de manera rápida la recta de una función lineal a partir de su fórmula.

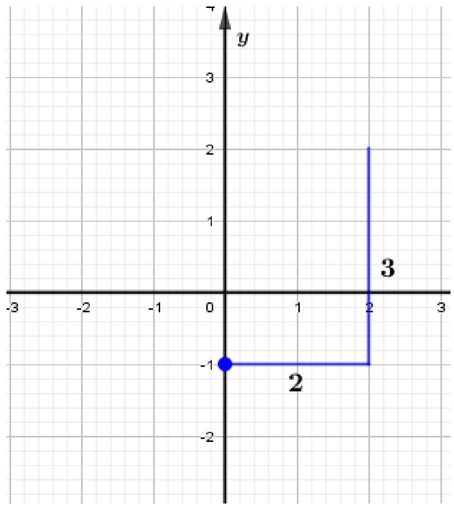
Ejemplo 3: Construir la gráfica de la función $\boldsymbol{f(x) = \frac{3}{2}x - 1}$

Paso ❶



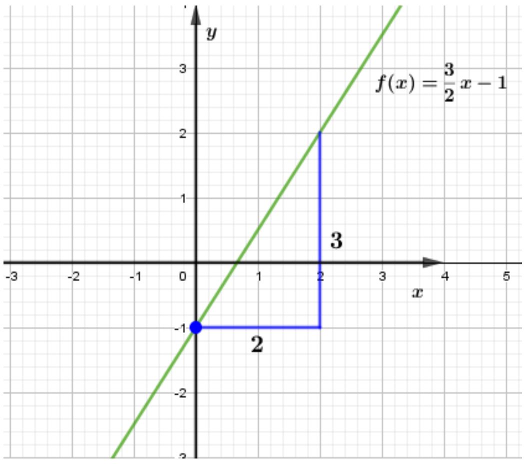
Marcamos la **ordenada** al origen (-1)

Paso ❷



A partir de ese punto marcamos la pendiente $\frac{3}{2}$. Como es positiva la recta "sube".

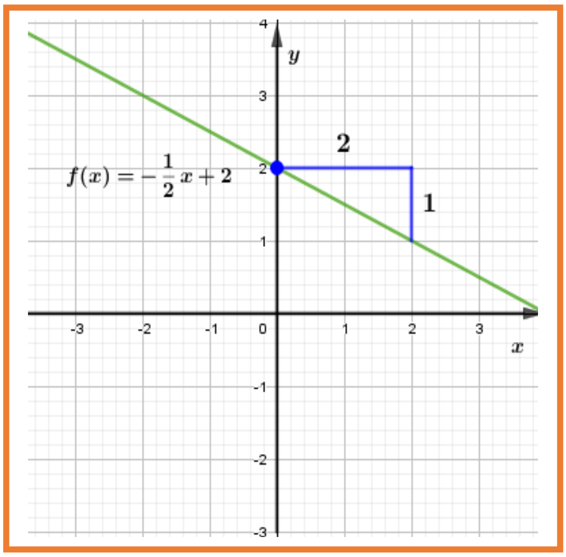
Paso ❸



Trazamos la recta

En caso que la pendiente sea negativa, en el paso ❷ se debe tener en cuenta que la recta "baja".

Ejemplo 4: Graficar $\boldsymbol{f(x) = -\frac{1}{2}x + 2}$



Función polinómica de segundo grado o función cuadrática

La función polinómica de segundo grado o función cuadrática es aquella cuya forma general es:

$$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad \text{, siendo } a_2 \neq 0$$

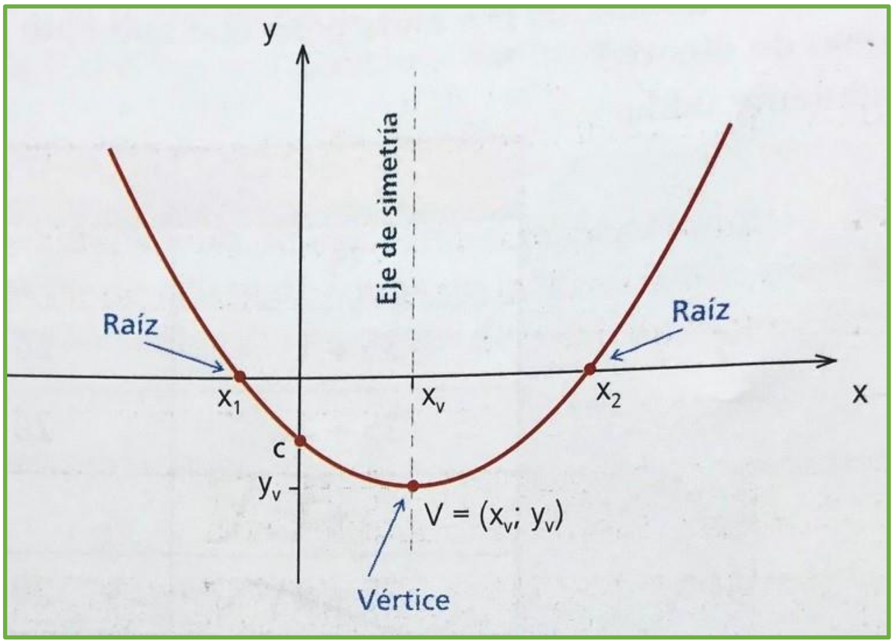
Término cuadrático (contiene x^2)

Término lineal (contiene a x)

Término independiente (no contiene x)

Se la suele expresar en forma genérica de esta manera $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$ o también así: $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$

- ✓ El dominio de la función cuadrática es siempre el conjunto **R**.
- ✓ Reconocemos una función polinómica de segundo porque el mayor de los exponentes a los que aparece elevada la variable independiente x es 2.
- ✓ Su representación gráfica es una curva llamada parábola. En el siguiente gráfico se pueden observar los elementos que distinguen esta curva.



Siguiendo la misma metodología que con la función lineal, vamos a repasar algunos conceptos vinculados a la función cuadrática a partir de ejemplos.

Comenzamos analizando la función cuadrática más sencilla.

- **Función de la forma $f(x) = ax^2$**

Con el ejemplo 1 vamos a estudiar la variación de la función cuadrática cuando tiene la forma $f(x) = ax^2$, siendo $b = 0 \; y \; c = 0$.

<u>Ejemplo 1</u>: Dada la función $f(x) = 2x^2$

a) Calcular las raíces y la ordenada al origen.
b) Indicar el conjunto imagen de ***f***.
c) Graficar la función ***f***.

a) La raíz de f tiene el mismo significado que en la función lineal. Por tanto, para calcular las raíces (en plural porque se pueden encontrar hasta dos raíces), se plantea la ecuación $f(x) = 0$

$$2x^2 = 0$$
$$x^2 = 0$$
$$x = 0$$

> En este caso la ecuación cuadrática es incompleta porque el término lineal y el independiente son nulos ($b = 0 \; y \; c = 0$) . Se puede resolver despejando la x.

Como la función tiene una sola raíz ($x = 0 \; es \; raíz \; doble$) entonces:

- La parábola corta al eje x en un solo punto.
- Las coordenadas del vértice son $V = (0; 0)$
- El eje de simetría es el eje y.

b) Si se analiza la fórmula de la función: $f(x) = 2x^2$ se puede observar que cualquier valor **R** que se le asigne a la variable *x* al elevarse al cuadrado es positivo, multiplicado por 2 sigue siendo positivo. Es decir que la imagen de la función puede ser 0 o encontrarse en el semieje positivo de las *y*.

En forma simbólica: **Im f:** $\boldsymbol{R^+} \cup \{\mathbf{0}\}$

c) La gráfica es una parábola cuyas ramas van hacia arriba porque el coeficiente del término cuadrático (2) es positivo. Se debe tener en cuenta que:

El signo de $\boldsymbol{a}$ indica hacia dónde se dirigen las ramas:
- Si $\boldsymbol{a}$ **es positivo** , las ramas van hacia arriba.
- Si $\boldsymbol{a}$ **es negativo**, las ramas van hacia abajo.

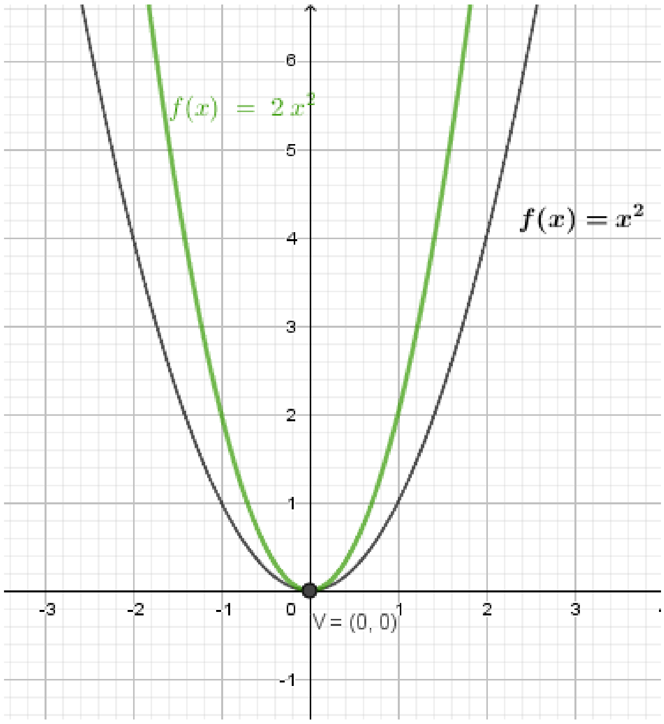
La función *f* presenta un tramo decreciente para los valores negativos de *x* y otro creciente para los valores positivos de *x*, siendo el 0 el mínimo valor que toma la función.

El valor absoluto de $\boldsymbol{a}$ modifica la abertura de la parábola. Recordar que:

- Cuanto menor es $|\boldsymbol{a}|$, la parábola es más abierta; y cuando mayor es $|\boldsymbol{a}|$, la parábola es más cerrada .

En este ejemplo, el $|\mathbf{2}| = \mathbf{2}.$ Si tomamos como referencia la gráfica de la **parábola matriz** ($f(x) = x^2$; $a = 1$), las ramas de la parábola son más cerradas.

Raíz, eje de simetría, vértice y conjunto imagen se encuentran en la gráfica de acuerdo a las respuestas dadas en los ítems a) y b). En la imagen también aparece la gráfica de la **parábola matriz**.



- ✓ Cuando la función cuadrática tiene la forma $f(x) = ax^2$, el vértice de la parábola siempre es el punto de coordenadas $O = (0{,}0)$ y el eje de simetría es el eje y

- **Función de la forma $f(x) = ax^2 + c$**

Con el ejemplo 2 vamos a estudiar la variación de la función cuadrática cuando tiene la forma $f(x) = ax^2 + c$, siendo $b = 0$ y $c \neq 0$.

Ejemplo 2: Dada las función $f(x) = x^2 - 4$, (En este ejemplo: $a = 1$, $b = 0$, $c = -4$)

a) Calcular las raíces y ordenadas al origen
b) Determinar las coordenadas del vértice.
c) Representar gráficamente

Iniciamos la resolución.

a) Raíces: $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 - 4 + 4 = 0 + 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{4} \Rightarrow |x| = 2 \Rightarrow$ $\boldsymbol{x_1 = -2 \quad x_2 = 2}$
La parábola corta al eje *x* en dos puntos, cuyas coordenadas son: (-2;0) y (2;0).
Calculamos el punto que corta la gráfica al eje y, la ordenada al origen:

$$f(0) = 0^2 - 4 = -4$$

La coordenada de la ordenada al origen es (0; -4)

b) Como **las raíces equidistan del eje de simetría**, las promediamos para obtener su ecuación y también la abscisa del vértice (x_v).

Cuando se tiene el dato de las dos raíces reales, se puede calcular la abscisa del vértice de la parábola calculando el promedio de las raíces: $x_v = \frac{x_1+x_2}{2}$

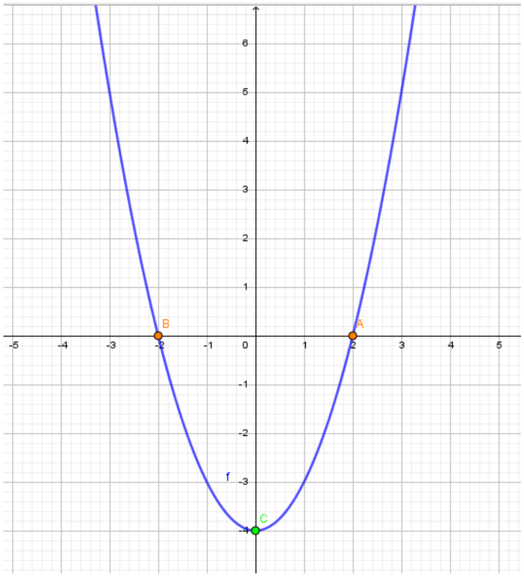
En este ejemplo:

$$\boldsymbol{x_v} = \frac{-2+2}{2} = 0$$

Para obtener la **ordenada del vértice** $(\boldsymbol{y_v})$**,** calculamos:
$f(x_v)$: $y_v = f(0) = 0^2 - 4 = 4$

$$\boldsymbol{V = (0;4)}$$

c) Representación gráfica.
Trazamos la parábola que contiene los datos obtenidos en el análisis de los ítems a) y c), teniendo en cuenta la orientación de las ramas de la parábola, de acuerdo con el signo del coeficiente cuadrático. En este ejemplo, como $a = 1$, las ramas van hacia arriba.



✓ Cuando la función cuadrática tiene la forma $f(x) = ax^2 + c$, respecto a la parábola matriz, la parábola se desplaza verticalmente, trasladándose hacia arriba o hacia abajo. Este desplazamiento no modifica el eje de simetría, sigue siendo el eje *y*, pero sí la ordenada al origen del vértice.

- **Función de la forma $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx}$; $\boldsymbol{c = 0}$**

Con el ejemplo 3 vamos a estudiar la variación de la función cuadrática cuando tiene la forma $f(x) = ax^2 + bx$, siendo $c = 0$.

Ejemplo 3: Dada las función $f(x) = -3x^2 + 6x$

a) Calcular las raíces y ordenadas al origen
b) Determinar las coordenadas del vértice.
c) Representar gráficamente

a) Para hallar las raíces se plantea la ecuación $f(x) = 0$. Pero a diferencia de los casos anteriores, no se puede despejar directamente la variable *x*. Una opción es resolver la ecuación cuadrática extrayendo factor común *x*.

$$-3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x \cdot (-3x + 6) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \boldsymbol{o} \ -3x + 6 = 0$$
$$\Rightarrow x = 0 \quad \boldsymbol{o} \ -3x + \ 6 - 6 = 0 - 6 \Rightarrow x = 0 \quad \boldsymbol{o} - 3x = -6 \Longrightarrow$$
$$\Rightarrow x = 0 \ \boldsymbol{o} \ \left(-\frac{1}{3}\right).(-3)x = (-6).\left(-\frac{1}{3}\right) \Rightarrow \boldsymbol{x_1 = 0} \vee \boldsymbol{x_2 = 2}$$

En este caso, *x* es siempre una de las soluciones. La otra solución se obtiene igualando a 0 el otro factor.

Las coordenadas de las raíces son (0;0) y (2;0).

Calculamos la ordenada: $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f(0)} = -3.0^2 + 6.0 = 0$

La coordenada de la ordenada al origen es (0;0).

b) Para hallar las coordenadas del vértice, en el ejemplo anterior, vimos que una opción es promediar las raíces halladas. En este caso sería:

$$x_v = \frac{0+2}{2} = 1$$

También tenemos otra forma de obtener la abscisa del vértice. Aquí no haremos la deducción, pero con **la fórmula $x_v = \frac{-b}{2a}$ podemos obtener el valor de la abscisa del vértice independientemente de las raíces**.

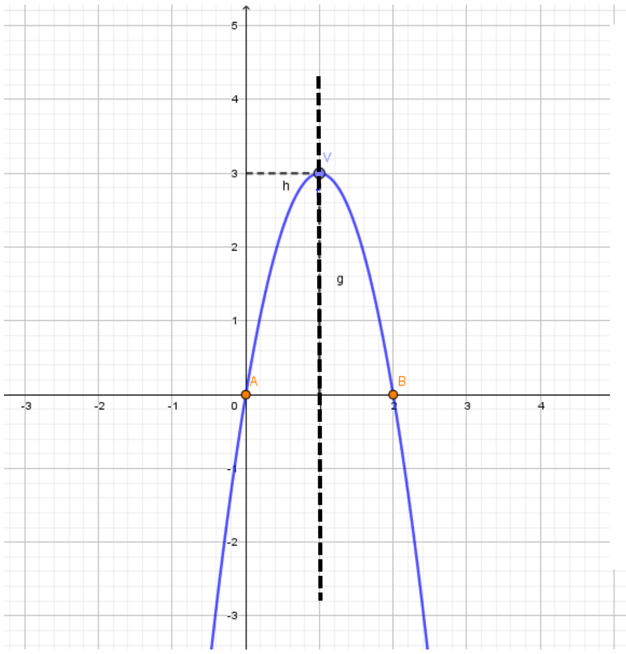
Calculemos ahora las coordenadas del vértice de esta función con esta fórmula:

$$\text{Vértice: } x_v = -\frac{6}{2.(-3)} = \mathbf{1}$$

Se obtiene el mismo valor que con la forma anterior. Queda hallar la ordenada del vértice:

$$y_v = -3.1^2 + 6.1 = 3 \Rightarrow \boldsymbol{V} = (\mathbf{1}; \mathbf{3})$$

c) Representación gráfica de $f(x) = -3x^2 + 6x$



- ✓ Las ramas de la parábola van hacia abajo porque $\boldsymbol{a = -3}$**, es negativo.**
- ✓ La parábola corta al eje *x* en dos puntos porque la función tiene dos raíces reales.
- ✓ El eje se simetría es una recta para al eje *y*. (no coincide con el eje *y*)
- ✓ El vértice de la parábola se sitúa sobre el eje de simetría.

- **Función de la forma $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$**

Con el ejemplo 4 vamos a estudiar la variación de la función cuadrática cuando tiene la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, siendo $a \neq 0, b \neq 0$ y $c \neq 0$.

<u>Ejemplo 4</u>: dada la siguiente función $f(x) = x^2 + 2x - 3$

a) Calcular las raíces y ordenada al origen.

b) Determinar las coordenadas del vértice.
c) Representar gráficamente.

a) Para calcular el valor de las raíces, igualamos la función a cero, de manera tal de poder determinar el/los valores de la variable independiente que anulen a la función. Gráficamente, estos valores son los puntos de corte de la parábola sobre el eje x.

Entonces:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \quad (a = 1\; b = 2\; c = -3)$$

Como queda planteada una ecuación cuadrática completa se debe aplicar la conocida fórmula resolvente:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$$

$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{2^2 - 4.1.(-3)}}{2.1} \quad x_2 = \frac{-2 + \sqrt{2^2 - 4.1.(-3)}}{2.1}$$

$$x_1 = \frac{(-2-4)}{2} \quad x_2 = \frac{(-2+4)}{2}$$

$$\boldsymbol{x_1 = -3 \quad x_2 = 1}$$

Las coordenadas de las raíces son (-3; 0) y (1;0).

La ordenada al origen: para determinar la ordenada, hallamos la imagen de la función en *x* = 0, gráficamente es el punto de intersección de la parábola con el eje *y*.

$$y = f(0) = 0^2 + 2.0 - 3 = -3$$

La coordenada de la ordenada al origen es el punto (0; -3).

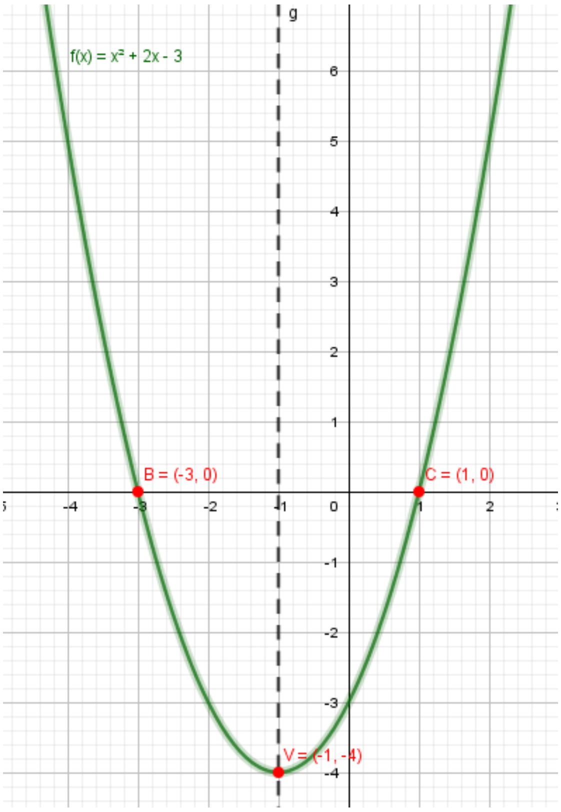
b) Determinar las coordenadas del vértice.

$$\boldsymbol{x_v} = -\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2a}} = -\frac{2}{2.1} = -1$$

$$\boldsymbol{y_v = f(v_x)} = f(-1) = (-1)^2 + 2.(-1) = -4$$

$$\boldsymbol{V(-1; -4)}$$

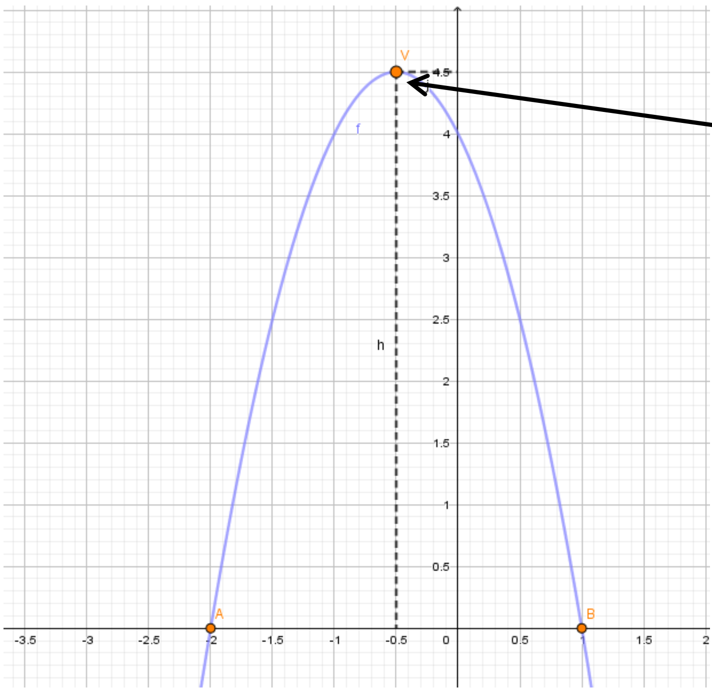
c) Representar gráficamente.



- **Función de la forma $\boldsymbol{f(x) = a \cdot (x - x_v)^2 + y_v}$**

La fórmula de una función cuadrática expresada de la forma $f(x) = a \cdot (x - x_v)^2 + y_v$ se llama **forma canónica**.

<u>Ejemplo 5</u>: Hallar la fórmula en forma canónica de la función cuadrática graficada.



$V = (-0{,}5; 4{,}5)$

La fórmula de la función en forma canónica es $f(x) = a \cdot (x - x_v)^2 + y_v$. Si se observa el gráfico se puede identificar las coordenadas del vértice: $V = (-0,5\,; 4,5)$.
Reemplazamos las coordenadas del vértice en la fórmula y queda:

$$f(x) = a \cdot \left(x - (-0,5)\right)^2 + 4,5$$

Se suprime el paréntesis

$$f(x) = a \cdot (x + 0,5)^2 + 4,5$$

Las coordenadas de cualquier punto que pertenece a la parábola debe verificar la fórmula de función. Por eso, para hallar el valor de a , se reemplaza las coordenadas de un punto en la fórmula.
Por ejemplo, el punto $A = (-2, 0)$, siendo -2 una de las raíces.(no es necesario que el punto que se considera sea una raíz).
Queda planteada esta ecuación lineal cuya incógnita es a. Se procede a despejar esa incógnita.

$$a \cdot (-2 + 0,5)^2 + 4,5 = 0$$

$$a \cdot (-1,5)^2 = -4,5$$

$$a = -4,5 \div 2,25$$

$$a = -2$$

La fórmula de la función graficada es:

$$\boldsymbol{f(x) = -2 \cdot (x + 0,5)^2 + 4,5}$$

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

De igual modo que otros conceptos matemáticos, los sistemas de ecuaciones lineales permiten describir, resolver y analizar situaciones de distinto tipo, pertenecientes al campo de la Matemática como de otras ciencias.
En este apartado trabajaremos con sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas (2x2). Se analizará qué son, qué significa resolverlos y qué métodos se pueden utilizar para resolver los sistemas lineales de 2x2.

Situación problemática

Un hotel tiene habitaciones individuales (con una cama) y habitaciones dobles (con dos camas). En total, hay 23 habitaciones y 40 camas. ¿Cuántas habitaciones hay de cada tipo?

Si "i" representa el número de habitaciones individuales y "d" el número de habitaciones dobles, la ecuación que describe en forma simbólica la condición de que el total de las habitaciones es 23 es:

$$\boldsymbol{i + d = 23} \quad ❶$$

Hay muchos pares de valores (i, d) que cumplen la condición planteada en la ecuación ❶.

Por Ejemplo:

Si $i = 13$ y $d = 10 \rightarrow$ se verifica que $13 + 10 = 23$

Sin embargo, los valores $i = 13$ y $d = 10$ no cumplen la otra condición que impone el problema (respecto al total de camas) y que se puede expresar mediante esta ecuación:

$$i + 2d = 40 \quad ❷$$

Verifiquemos:

$$13 + 2 \cdot 10 = 33 \neq 40$$

Entonces debemos encontrar los pares de valores (i, d) que cumplen las dos condiciones., o sea las ecuaciones ❶ y ❷.

$$\begin{cases} \boldsymbol{i + d = 23} \\ \boldsymbol{i + 2d = 40} \end{cases}$$

Se construye un sistema de ecuaciones lineales con el cual se expresa que deben cumplirse dos condiciones simultáneamente.

Es posible buscar las soluciones con la ayuda de una tabla. Si, por ejemplo, le dan valores a "i", a partir de ellos pueden obtener los correspondientes valores de "d" (pues deben sumar 23), y luego de $i + 2d$

Habitaciones individuales: i	1	2	3	4	5	**6**	7
Habitaciones dobles $d = 23 - i$	22	21	20	19	18	**17**	16
Camas: i + 2d	45	44	43	42	41	**40**	39

De todos los valores de la tabla el que cumple las dos condiciones es $i = 6$ y $d = 17$. Entonces la respuesta es que el hotel tiene 6 habitaciones individuales y 17 habitaciones dobles.

Resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas significa hallar, si es que existen, todos los valores de las incógnitas (en forma genérica las identificaremos con las letras x e y) que verifican ambas ecuaciones simultáneamente.

En forma simbólica expresaremos así:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Donde a_1, b_1, a_2, b_2, son los coeficientes de las incógnitas y c_1 y c_2 los términos independientes.

La solución del problema plateado inicialmente fue obtenida prácticamente por tanteo y si el problema es más complejo esta forma de resolución es poco práctica. Por eso es necesario conocer métodos de resolución de sistemas, más rigurosos. Veamos algunos de ellos.

Aclaración: cuando se expresa sistemas de 2x2 se refiere al sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

✓ Métodos algebraicos de resolución de sistemas de 2x2.

Aquí trabajaremos dos métodos algebraicos: el método de sustitución y el método de igualación. Existen otros métodos algebraicos que los verán más adelante.

✓ Método de sustitución.

Consideremos nuevamente el sistema de 2x2 del problema de las habitaciones del hotel.

$$\begin{cases} i + d = 23 \\ i + 2d = 40 \end{cases}$$

El método de sustitución consiste en despejar una las incógnitas en algunas de las ecuaciones y sustituir la expresión obtenida en la otra ecuación.

Conviene despejar i o d de la primera ecuación . En el caso de despejar d queda:

$$d = 23 - i.$$

Sustituimos $d = 23 - i$ en la segunda ecuación y queda planteada una ecuación de primer grado con una sola incógnita:

$$i + 2(23 - i) = 40$$
$$i + 46 - 2i = 40$$
$$-i + 46 = 40$$
$$46 = 40 + i$$
$$6 = i$$

Conocido el valor de i , el próximo paso es calcular el valor de d, reemplazando el valor de i en la expresión despejada inicialmente:

$$d = 23 - 6 \rightarrow d = 17$$

Observamos que el valor de $i = 6$ que significa cantidad de habitaciones individuales y $d = 17$ que significa cantidad de habitaciones dobles, coincide con la solución dada anteriormente.

Pasos para la resolución de un sistema por el **método de Sustitución**:

1º Se despeja una de las incógnitas de una de las ecuaciones.
2º Se sustituye la expresión obtenida en la otra ecuación.
3º Se resuelve la ecuación resultante.
4º Se halla la otra incógnita, reemplazando el valor hallado en 3 en la expresión despejada en el paso 1.

– **Ejemplo 2**: Resolver el siguiente sistema por el método de sustitución.

$$\begin{cases} 5x - y = 5 \quad (1) \\ 3y - 2x = 11 \ (2) \end{cases}$$

Despejamos una de las incógnitas de la ecuación (1)

$$5x - y = 5$$

$$5x = 5 + y$$

$$5x - 5 = y$$

Reemplazamos en la ecuación (2) y la resolvemos

$$3y - 2x = 11$$

$$3.(\mathbf{5x - 5}) - 2x = 11$$

$$15x - 15 - 2x = 11$$

$$13x - 15 = 11$$

$$13x = 26$$

$$x = 26:13$$

$$\boldsymbol{x = 2}$$

Conocido el valor de *x*, hallamos el valor de *y*:

$$y = 5x - 5 \rightarrow y = 5.2 - 5 \rightarrow \boldsymbol{y = 5}$$

✓ **Método de igualación.**

Vamos a resolver ahora el siguiente ejemplo utilizando otro método algebraico.

<u>Ejemplo 3</u>: Resolver el siguiente sistema mediante el método de igualación.

$$\begin{cases} 2x + y = 47 \quad (1) \\ 4x + y = 83 \quad (2) \end{cases}$$

En el primer paso se despeja la misma incógnita de las ecuaciones (1) y (2).

$$2x + y = 47 \rightarrow y = 47 - 2x$$

$$4x + y = 83 \rightarrow y = 83 - 4x$$

Tal como lo señala el nombre del método, se igualan las expresiones despejadas y se resuelve la ecuación lineal con una incógnita que queda planteada.

$$y = y$$

$$47 - 2x = 83 - 4x$$

$$47 - 83 = -4x + 2x$$

$$-36 = -2x$$

$$(-36):(-2) = x$$

$$\boldsymbol{18 = x}$$

Se sustituye el valor de la incógnita que se halló (x) en cualquiera de las ecuaciones obtenidas en el primer paso y se calcula el valor de la otra incógnita.

En este caso, se halla el valor de *y*: $y = 83 - 4x \rightarrow y = 83 - 4.18 \rightarrow \boldsymbol{y = 11}$

Para resolver un sistema de ecuaciones con el **método de igualación**:

1º Se despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones del sistema.
2º Se igualan las expresiones despejadas en 1.
3º Se resuelve la ecuación resultante.
4º Se calcula la otra incógnita sustituyendo el valor de la incógnita hallada 3. en cualquiera de las expresiones despejadas en primer paso.

Con la presentación de los métodos de sustitución e igualación se finaliza el desarrollo de métodos algebraicos para la resolución de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.

A continuación trabajaremos con otro tipo de método: el método gráfico.

Pero antes de desarrollar este otro método, vamos a recordar algunas ideas sobre las ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Una ecuación lineal con dos incógnitas $(\boldsymbol{ax + by = c})$**, por lo general, admite infinitas soluciones** que se pueden interpretar gráficamente como puntos de un plano.

Por ejemplo: hallar soluciones de la ecuación $3x + y = 4$

La técnica que se utiliza habitualmente para hallar las soluciones es expresar a la variable *y* en función a la variable *x*; quedando en este caso:

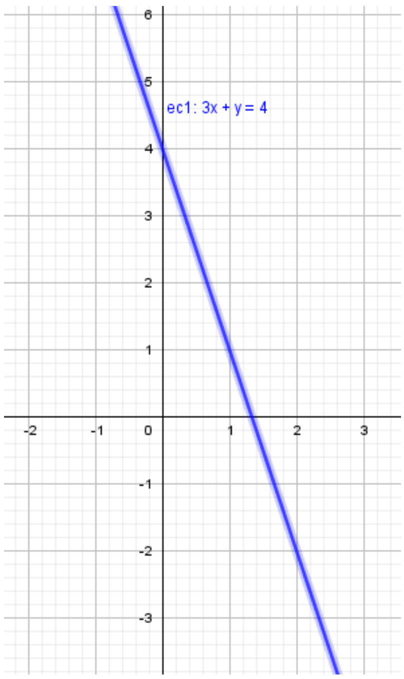
$$y = -3x + 4$$

Se puede hacer una tabla de valores para calcular algunas soluciones:

x	$y = 4 - 3x$
0	$4 - 3.0 = 4$
1	$4 - 3.1 = 1$
2	-2
3	-5

También se pueden representar gráficamente en el plano cartesiano las soluciones de la ecuación $3x + y = 4$. Todas las soluciones están situadas en una recta.

La representación gráfica de las soluciones de una ecuación lineal con dos incógnitas $(\boldsymbol{ax + by = c})$ **es una recta**.



Hecho este repaso, a continuación desarrollaremos el método gráfico en el que se utiliza el concepto anterior.

✓ **Método gráfico**

Este método consiste en representar gráficamente en el plano cartesiano las rectas que contienen las infinitas soluciones de cada ecuación lineal con dos incógnitas. A partir de allí, se analiza si existen o no soluciones comunes.

<u>Ejemplo 4</u>: Resolver el siguiente sistema por el método gráfico.

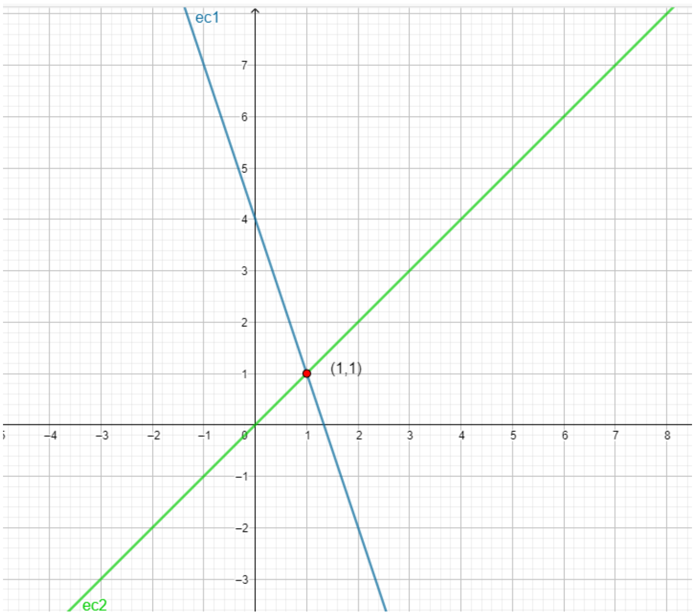
$$\begin{cases} 3x + y = 4 & (1) \\ x - y = 0 & (2) \end{cases}$$

Despejamos *y* de (1) y (2):

$$3x + y = 4 \rightarrow \boldsymbol{y = 4 - 3x}$$

$$x - y = 0 \rightarrow \boldsymbol{y = x}$$

Al representar gráficamente ambas ecuaciones en un mismo sistema de ejes coordenados queda la siguiente situación:



Se observa que las rectas se intersecan en un punto de coordenadas $(1,1)$. Esto significa que las coordenadas de ese punto es solución común a ambas ecuaciones. Es decir, **existe solución y es única.**

Un sistema de ecuaciones lineales que tiene una única solución se dice que es compatible determinado.

Ejemplo 5: Resolver el siguiente sistema por el método gráfico.

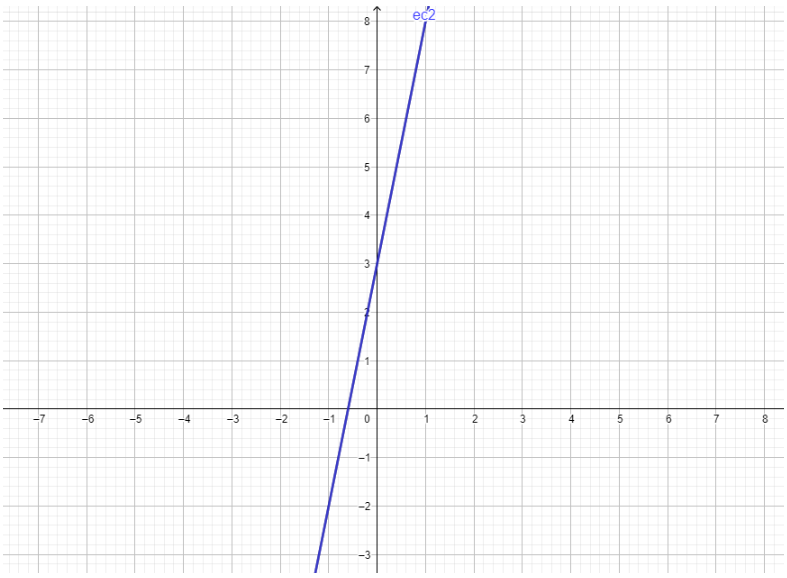
$$\begin{cases} 5x - y = -3 \ (1) \\ -5x + y = 3 \ (2) \end{cases}$$

Despejamos "y" de las ecuaciones (1) y (2)

$$5x - y = -3 \rightarrow \boldsymbol{y = 5x + 3}$$

$$-5x + y = 3 \rightarrow \boldsymbol{y = 5x + 3}$$

Representamos gráficamente ambas ecuaciones en un mismo sistema de ejes coordenados.



Las dos rectas se superponen, es decir, son rectas paralelas coincidentes. Esto significa que toda solución de la primera ecuación también lo es de la otra. Por lo tanto**, existen infinitas soluciones.**

Un sistema de ecuaciones lineales que admite infinitas soluciones se dice que es compatible indeterminado.

Ejemplo 6: Resolver el siguiente sistema por el método gráfico.

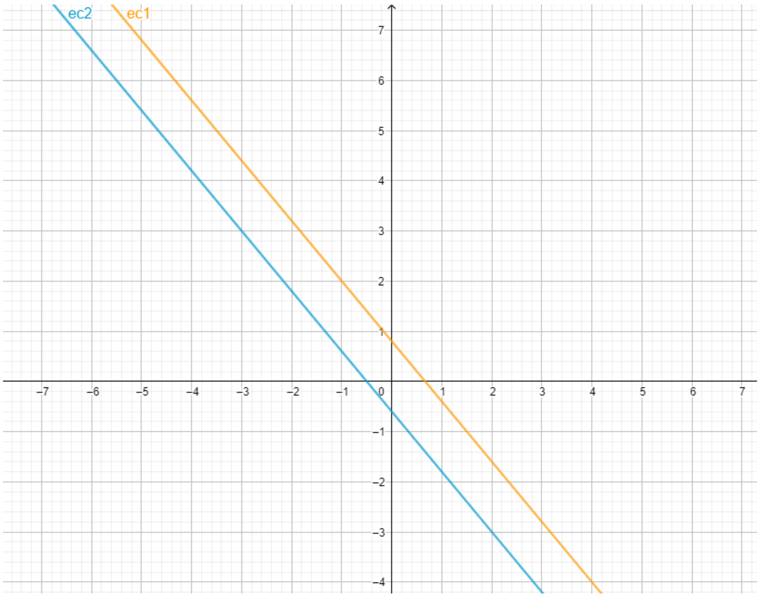
$$\begin{cases} 6x + 5y = 4 \ (1) \\ -6x - 5y = 3 \ (2) \end{cases}$$

Despejamos "y" de las ecuaciones (1) y (2)

$$6x + 5y = 4 \rightarrow \boldsymbol{y = -\frac{6}{5}x + \frac{4}{5}}$$

$$-6x - 5y = 3 \rightarrow \boldsymbol{y = -\frac{6}{5}x - \frac{3}{5}}$$

Representamos gráficamente ambas ecuaciones en un mismo sistema de ejes coordenados.



Las rectas son paralelas, es decir, no existen punto comunes. Esto significa que **no existe solución.**

Un sistema de ecuaciones lineales que no tiene solución se dice que es incompatible

Conclusión de las interpretaciones de las gráficas:

- **Si las rectas se cortan en un punto el sistema de ecuaciones COMPATIBLE DETERMINADO y tiene una única solución**
- **Si las rectas se superponen el sistema de ecuaciones es COMPATIBLE INDETERMINADO y tiene infinitas soluciones**
- **Si las rectas son paralelas el sistema es INCOMPATIBLE y no tiene solución**

TRIGONOMETRÍA

La noción básica de la trigonometría se remonta al trabajo de matemáticos griegos, egipcios, indios, árabes y chinos. La palabra trigonometría se deriva de dos vocablos griegos: *trigonon*, que significa triángulo, y *metria*, que significa medida. Es decir, el nombre trigonometría hace alusión a las diversas relaciones entre los ángulos de un triángulo y sus lados.

El astrónomo y matemático griego Hiparco (Siglo II AC), fue uno de los principales inventores de la trigonometría. Las tablas de "cuerdas" que elaboró fueron precursoras de las tablas de valores de las funciones trigonométricas que aparecían en todos los textos de trigonometría hasta antes de la invención de la calculadora de mano. El primer matemático europeo que definió las funciones trigonométricas directamente en términos de triángulos rectángulos en lugar de círculos, con tablas de las seis funciones trigonométricas, fue el matemático y astrónomo austriaco Georg Joachim von Lauchen (1514-1574), también conocido como Georg Joachim Rheticus. Además, Rheticus es recordado por que fue el único discípulo de Nicolás Copérnico (1473-1543) y el primer defensor de la teoría heliocéntrica del sistema solar propuesta por su maestro.

En esta sección se inicia el tema caracterizando a los ángulos y analizando dos sistemas de medición de ángulos. Luego se definen las funciones trigonométricas de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo. Y, por último, extendemos estas definiciones a los ángulos generales

Contenidos de este capitulo

Ángulos y sus medidas. Trigonometría del triángulo rectángulo. Funciones o Razones trigonométricas de ángulos especiales. Identidad Fundamental de la trigonometría. Resolución de triángulos rectángulos. Resolución de triángulos oblicuángulos.

I. Ángulos y sus medidas

Un **ángulo** es la abertura entre dos semirrectas con un mismo origen llamado vértice. A una de las semirrectas la denominamos **lado inicial del ángulo** y a la segunda semirrecta la denominamos **lado final del ángulo**.

Los ángulos se pueden representar con una letra del alfabeto griego $(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$, o bien, teniendo en cuenta el nombre del vértice asociado como, $\angle A, \angle BAC, \hat{a}$.

Si consideramos el ángulo situado en el plano, en un sistema de coordenadas cartesianas, de modo tal que el lado inicial coincida con el semieje "x" positivo, el lado final puede rotar en dos direcciones, si lo hace en sentido anti-horario decimos que el ángulo α es **positivo** (Figura 1) y si la rotación es en sentido horario se dice que el ángulo α es **negativo** (Figura 2)

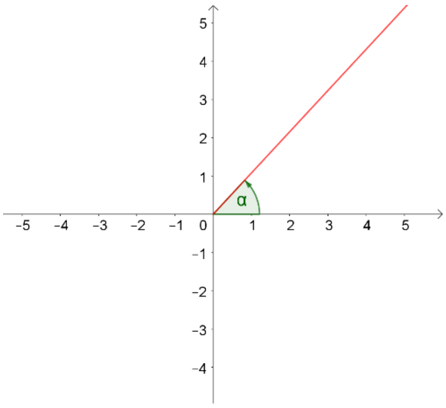


Figura 1

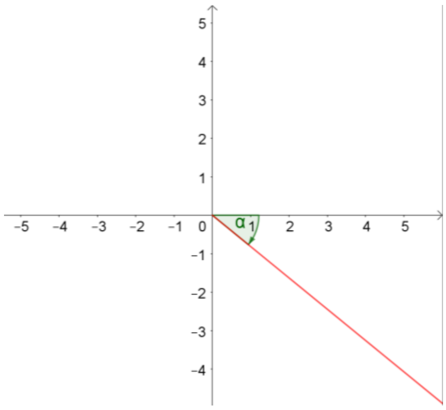


Figura 2

Sistemas de medición de ángulos

Existen varios sistemas de medición de ángulos, los más utilizadas por nosotros son: el **sistema sexagesimal** y el **sistema circular**

Sistema sexagesimal: en este sistema la unidad de medida es el **grado sexagesimal** y se obtiene dividiendo una circunferencia en 360 partes llamadas, el grado tiene además submúltiplos: el **minuto** que es un grado dividido en 60 partes y el segundo que es un minuto dividido en 60 partes. A partir de esto tenemos que $1° = 60'$ y que $1' = 60''$.

Ejemplos de grados en sistema sexagesimal

a) $38°$
b) $123°40'$
c) $23°40'36''$

La relación de conversión entre los grados minutos y segundos de un ángulo es el siguiente

- Para convertir de una unidad mayor a una menor se multiplica por 60 o por 3600, según sea el caso.
- Para convertir de una unidad menor a una mayor se divide por 60 o por 3600, según sea el caso.

Ejemplo: Convertir $23°40'36''$ a grados, a minutos y a segundos

Solución

Para pasar a grados, los minutos se dividen por 60 y los segundos por 3600

$$23°40'36'' = 23° + \left(\frac{40}{60}\right)° + \left(\frac{36}{3600}\right)° = 23{,}68°$$

Es decir $23°40'36''$ equivale a $23{,}68°$

Para pasar a minutos, los grados se multiplican por 60 y los segundos se dividen por 60

$$23°40'36'' = (23)(60)' + 40' + \left(\frac{36}{60}\right)' = 1420{,}6'$$

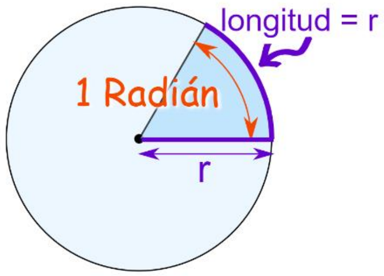
Es decir $23°40'36''$ equivale a $1420{,}6'$

Para pasar a segundos, los grados se multiplican por 3600 y los minutos multiplican por 60

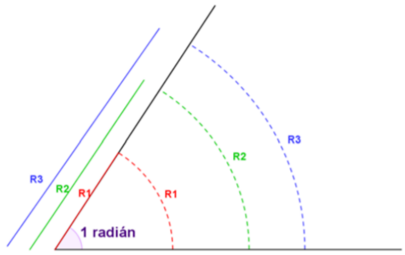
$$23°40'36'' = (23)(3600)'' + (40)(60)'' + 36'' = 85236''$$

Es decir $23°40'36''$ equivale a $85236''$.

Sistema Circular: en este sistema, la unidad fundamental es el **radián**. El radián es el ángulo central subtendido por un arco igual a la longitud de radio del círculo.

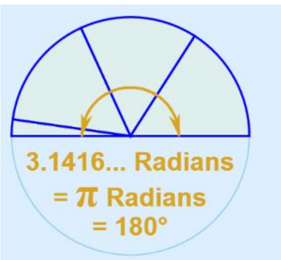


Es un ángulo cuyo arco de circunferencia comprendido entre sus lados inicial y final tiene una longitud igual a la del radio de la circunferencia. Es decir, es un ángulo tal que cualquier arco que se le asocie, mide exactamente lo mismo que el radio utilizado para trazarlo.



Entonces

- el ángulo de un giro mide 2π radianes, ya que el arco de circunferencia, comprendido entre sus lados inicial y final, es exactamente el perímetro de la circunferencia de radio uno.



- el ángulo llano mide π radianes, ya que el arco de circunferencia, comprendido entre sus lados inicial y final, es exactamente la mitad del perímetro de la circunferencia de radio uno.

- el ángulo recto mide $\frac{\pi}{2}$ radianes, ya que el arco de circunferencia, comprendido entre sus lados inicial y final, es exactamente un cuarto del perímetro de la circunferencia de radio uno.

Algunas equivalencias

$360° = 2\pi$

$180° = \pi$

$90° = \frac{\pi}{2}$

El número π (pi) es la relación entre las longitudes de una circunferencia y su diámetro. Es un número irracional

Al utilizar la calculadora se puede trabajar con los dos sistemas de medidas, que se presentan como modos:

- ✓ en modo "degree (DEG) o (D)" la calculadora considera que la medida del ángulo está representada en el sistema sexagesimal
- ✓ en modo "radian (RAD) o (R)" la calculadora considera que la medida del ángulo está representada en el sistema radial

Conversión de grados a radianes y de radianes a grados

Ejemplo: ¿Cuál es el ángulo, medido en el sistema sexagesimal que en el sistema radial mide 1,5 radianes?

Se aplica una regla de tres simple, utilizando algunas de las equivalencias destacadas anteriormente

$$\begin{array}{lcl} \pi \text{ rad} & \text{———} & 180° \\ 1{,}5 \text{ rad} & \text{———} & x \end{array}$$

Entonces:

$$x = \frac{1{,}5\, rad\; 180^0}{\pi\, rad} \quad \Longrightarrow \quad x = 85°\, 56'37"$$

Ejemplo: ¿Cuál es el ángulo, medido en el sistema radial que en el sistema sexagesimal mide 60°?

$$\begin{array}{lcl} 180° & \text{———} & \pi \text{ rad} \\ 60° & \text{———} & x \end{array}$$

Entonces:

$$x = \frac{60^0\, \pi\, rad}{180^0} \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{\pi}{3}\, rad$$

Otra forma de convertir grados a radianes o radianes a grados es la siguiente:

- Para pasar un ángulo en grados a radianes, se multiplica tal ángulo en grados por el factor $\frac{\pi}{180°}$;
- para pasar un ángulo en radianes a grados, se multiplica tal ángulo en radianes por el factor $\frac{180°}{\pi}$.

<u>Ejemplo</u>

Convertir $145°$ a radianes y, $\frac{8}{6}\pi\, rad$ a grados

<u>Solución</u>

$$145° = 145°\frac{\pi}{180°} = \frac{145°\pi}{180°} = \frac{29}{36}\pi\, rad$$

Por lo tanto, $145°$ es equivalente a $\frac{29}{36}\pi\, rad$.

$$\frac{8}{6}\pi\, rad = \frac{8}{6}\pi\;\frac{180°}{\pi} = \frac{8(180°)\pi}{6\pi} = 240°$$

Por lo tanto, $\frac{8}{6}\pi\, rad$ es equivalente a $240°$.

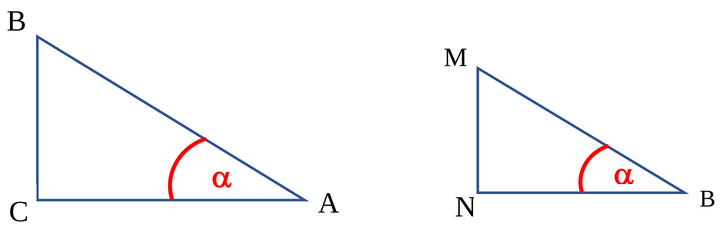
¿Y un RADIAN?

¿Cuántos grados sexagesimales equivalen a un radián?

$1\text{rad} = 1 rad\; \frac{180°}{\pi} = 57{,}2957795\ldots°$ $\qquad$ $1 \text{ rad} \approx 57°\, 17'\, 45"$

II. Razones trigonométricas en un triángulo rectángulo

Se tienen dos triángulos rectángulos ABC Y PMN con un ángulo agudo igual



Como ambos triángulos tienen $\hat{C} = \hat{N}$ por ser rectos y $\hat{P} = \hat{A} = \alpha$, son triángulos semejantes, por lo tanto, sus lados correspondientes son proporcionales, entonces

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{MP}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{PN}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{MN}}$$

Si se toma una proposición

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{MP}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{MN}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{MP}} \ (1)$$

Es decir que, si se toman dos lados de un triángulo rectángulo, la razón entre ellos es la misma que si se toman los lados correspondientes del otro triángulo rectángulo con un ángulo agudo igual. Por lo tanto, los cocientes entre dos lados de un triángulo rectángulo solo dependen del ángulo agudo α

En un triángulo rectángulo, el lado opuesto al ángulo recto se llama hipotenusa y los lados que forman el ángulo recto son los catetos.

Si consideramos el ángulo α como indican las figuras

Ahora:

El cateto $\overline{BC}$ de la primera figura y el cateto $\overline{MN}$ en la segunda, son los catetos opuestos a α, ya que se encuentra frente a él

El cateto $\overline{CA}$ y el $\overline{NP}$ son los catetos adyacentes a α, ya que junto con la hipotenusa forman el ángulo

Entonces ahora tenemos: la hipotenusa, el cateto opuesto a α y el cateto adyacente a α y si tenemos en cuenta (1) nos queda

$$\frac{cateto\ opuesto\ a\ \alpha\ (en\ ABC)}{hipotenusa\ (en\ ABC)} = \frac{cateto\ opuesto\ a\ \alpha\ (en\ MNP)}{hipotenusa\ (en\ MNP)}$$

De este modo resulta que cualquiera que sea el triángulo rectángulo con un ángulo agudo α, este cociente es siempre igual. Por ese motivo, tiene un nombre específico: **seno de $\boldsymbol{\alpha}$** y se escribe **sen $\boldsymbol{\alpha}$**

Del mismo modo, los otros cocientes entre los distintos lados resultan ser siempre igual dependiendo solo del ángulo $\boldsymbol{\alpha}$ y también reciben nombres específicos, así se tiene:

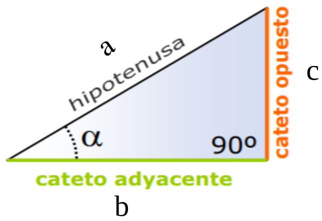
- Al cociente entre el cateto adyacente y hipotenusa se denomina **coseno** y se escribe **cos $\boldsymbol{\alpha}$**
- Al cociente entre el cateto opuesto y el adyacente se denomina **tangente** y se escribe **tg $\boldsymbol{\alpha}$**

$$sen\ \alpha = \frac{cateto\ opuesto\ de\ \alpha}{hipotenusa}$$

$$\cos\alpha = \frac{cateto\ adyacente\ de\ \alpha}{hipotenusa}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{cateto\ opuesto\ de\ \alpha}{ateto\ adyacente\ de\ \alpha}$$

Las razones trigonométricas para el ángulo α, de acuerdo a los nombres dados a los lados en la figura son:



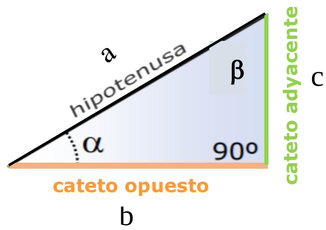
$sen\ \propto\ = \frac{c}{a}$ $\quad cos\ \propto\ = \frac{b}{a}$ $\quad tg\ \propto\ = \frac{c}{b}$

Ahora, si se considera el otro ángulo agudo que llamaremos β,

¿el cateto opuesto y adyacente serán los mismos que en el caso anterior?

NO!!, HAN CAMBIADO, ahora, c es el cateto adyacente y b es el opuesto

Luego, las fórmulas de las razones trigonométricas para el ángulo β en el triángulo anterior son:



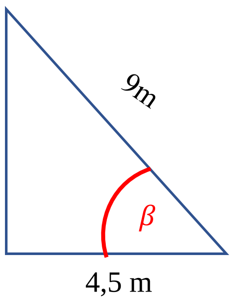
$sen\ \beta\ = \frac{b}{a}$ $\quad cos\ \beta\ = \frac{c}{a}$ $\quad tg\ \beta\ = \frac{b}{c}$

Como dijimos el valor de las razones trigonométricas depende **únicamente del valor del ángulo**

¿Cómo calcular el valor del ángulo?

Problema:
Un grupo de alumnos del taller de diseño industrial propusieron hacer una rampa de 9 metros con una base de 4,5 metros. Si la construyeron de esta manera, ¿tendrá un ángulo de inclinación mayor que una rampa de 6 metros y 3 metros de altura?

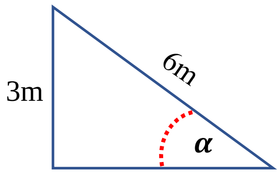
Para la primera rampa se puede dibujar el siguiente esquema:



Donde β es el ángulo que forma la rampa con el suelo.
En este triángulo rectángulo sólo se cuenta con las medidas de la hipotenusa y del cateto adyacente del ángulo β, por lo tanto, se puede calcular el coseno de β.

$$cos\,\beta = \frac{4{,}5}{9} = 0{,}5$$

Para la segunda rampa se puede hace el siguiente esquema



Aquí α es el ángulo que forma la rampa con el suelo.
Como en este caso se tiene la medida de la hipotenusa del triángulo rectángulo y la medida del cateto opuesto a α se puede calcular el seno de α.

$$sen\,\alpha = \frac{3}{6} = 0{,}5$$

Con la información del seno de α y del coseno de β, *¿alcanza para saber cuál es el mayor de los ángulos de inclinación? ¿α será igual a β?¿Cuánto mide α y cuánto mide β?*

Para calcular el valor de α se puede proceder con la calculadora del siguiente modo:

Sabiendo que sen α= 0,5

sen α= 0,5 es una ecuación en la que debemos despejar α entonces podemos escribir:

α= inv sen 0,5

La calculadora tiene una tecla, que puede tener distintos nombres: inv, shift, 2nd, etc. para obtener la inversa y luego se teclea la función de la cual se quiere obtener la inversa, que puede ser el seno $\boxed{\text{sin}}$ o el coseno $\boxed{\text{cos}}$ o la tangente $\boxed{\text{tan}}$
Para determinar el valor de α usando la calculadora se tienen también dos posibilidades, según cómo funcione tu calculadora

1) 0,5 inv sin
2) inv sin 0,5

en el visor aparecerá el número 30, lo que significa que α mide 30°.

Con el mismo procedimiento, pero con las teclas $\boxed{\text{inv}}$ y $\boxed{\text{cos}}$ se obtiene el ángulo β
cos β =0,5 ⇒ β= 60°

Por lo tanto, la primera rampa tiene mayor inclinación que la segunda

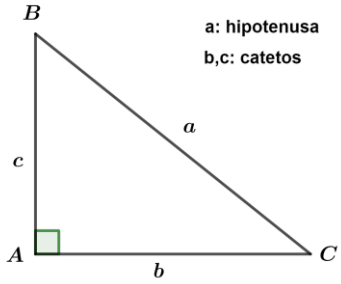
Nota: la inversa de cada una de las razones trigonométricas, reciben el nombre de arco seno, arco coseno, arco tangente; pero en este curso solo llamaremos “inversa de” .

III. Teorema de Pitágoras

Teorema de Pitágoras:

En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Es decir, sea ABC un triángulo rectángulo de ángulo recto en el vértice A



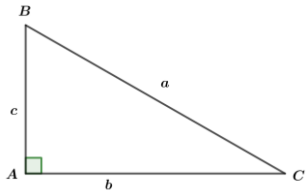
$$a^2 = b^2 + c^2$$

Ejemplo

Determinar el valor de la hipotenusa del siguiente triangulo que se muestra, según los datos proporcionados

a) $b = 4, c = 3$

b) $b = 7, c = 3$



Solución

a) $b = 4, c = 3$

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$a^2 = 4^2 + 3^2$$
$$a^2 = 16 + 9$$
$$a^2 = 25$$
$$a = \sqrt{25}$$
$$a = 5$$

b) $b = 7, c = 3$

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$a^2 = 7^2 + 3^2$$
$$a^2 = 49 + 9$$
$$a^2 = 58$$
$$a = \sqrt{58}$$
$$a = 7{,}62$$

Obtención de Cateto: en todo triángulo rectángulo, el cuadrado es un cateto es igual a la diferencia de los cuadrados de la hipotenusa y del otro cateto

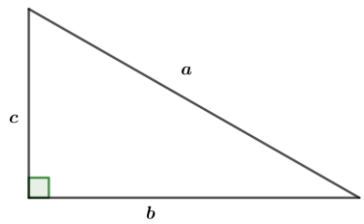
$$c^2 = a^2 - b^2;\ b^2 = a^2 - c^2$$

Ejemplo

Teniendo en cuenta la figura que se presenta, utilícela para determinar el valor del cateto faltante

a) $a = 11, c = 4$

b) $a = 13, b = 11$



Solución

- $a = 11, c = 4$
  $b^2 = a^2 - c^2$
  $b^2 = 11^2 - 4^2$
  $b^2 = 121 - 16$
  $b^2 = 105$
  $b = \sqrt{105}$
  $b = 10{,}25$
- $a = 13, b = 11$
  $c^2 = a^2 - b^2$
  $c^2 = 13^2 - 11^2$
  $c^2 = 169 - 121$
  $c^2 = 48$
  $c = \sqrt{48}$
  $c = 6{,}93$

IV. Resolución de Triángulo Rectángulo

¿Qué es resolver un triángulo?

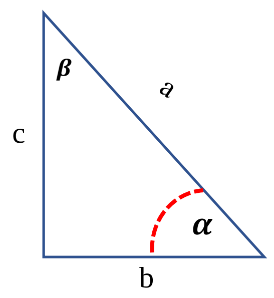
Frecuentemente, de un triángulo se conocen datos suficientes como para que quede perfectamente determinado (es decir, que sólo haya un triángulo que verifique esos datos). Resolverlo es encontrar las medidas de sus restantes elementos, o de algunos de ellos.
Si se sabe que el triángulo es rectángulo, para determinarlo es suficiente dar un lado y un ángulo agudo, o dos lados.
Y para resolverlo se utiliza:

- **Relaciones entre los ángulos**
  La suma de los ángulos de un triángulo es igual a 180º: Como en un triángulo rectángulo uno de sus ángulos mide 90°, la suma de los dos ángulos agudos mide también 90°
- **Relaciones entre los lados: teorema de Pitágoras**
- **Relaciones entre los lados y los ángulos**
  Las razones trigonométricas relacionan los ángulos y los lados.

Podemos considerar tres casos dependiendo de los datos. En cada uno de ellos existen varias formas de obtener la solución. Vamos a describir una en cada caso:

Primer caso: Se conocen un ángulo $\hat{\alpha}$ y la hipotenusa *a*:

Como es un triángulo rectángulo, $\hat{\beta}$ = 90º – $\hat{\alpha}$



Ahora a partir de las razones trigonométricas de $\hat{\alpha}$ o $\hat{\beta}$, obtenemos los lados que faltan. También cabe utilizar el teorema de Pitágoras cuando conozcamos uno de los dos catetos.

$$sen\ \alpha = \frac{c}{a} \quad \Rightarrow \quad c = a\ sen\alpha$$

$$cos\ \alpha = \frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad c = b\ cos\alpha$$

Ejemplo: $\hat{\alpha}$ = 63° y a = 15 m

$\hat{\beta}$ = 90º – 63°
$\hat{\beta}$ = 27º

$$sen\ 63° = \frac{c}{15} \quad \Rightarrow \quad c = 15\ sen\ 63° \quad \Rightarrow \quad c = 13{,}37\ m$$

$$cos\ 63° = \frac{b}{15} \quad \Rightarrow \quad b = 15 \cos 63° \quad \Rightarrow \quad b = 6{,}81\ m$$

Segundo caso: Se conocen un ángulo $\hat{\alpha}$ y un cateto b:

Como es un triángulo rectángulo, $\hat{\alpha} = 90^o - \hat{\beta}$

También en este caso las razones trigonométricas de $\hat{\alpha}$ o $\hat{\beta}$ sirven para obtener al menos uno de los lados y puede utilizarse el teorema de Pitágoras cuando hallemos el valor de un lado más. Una forma de resolución es:

$$sen\ \alpha = \frac{c}{a} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{c}{sen\ \alpha}$$

$$tg\ \alpha = \frac{c}{b} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{c}{\cos\alpha}$$

Ejemplo: $\hat{\alpha} = 63°$ y $c = 12$ cm

$\hat{\beta} = 90^o - 63°$
$\hat{\beta} = 27^o$

$$sen\ 63° = \frac{12\ cm}{a} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{12\ cm}{sen\ 63°} \quad \Rightarrow \quad a = 13{,}47\ cm$$

$$tg\ 63° = \frac{12\ cm}{b} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{12\ cm}{\text{tg}\ 63°} \quad \Rightarrow \quad b = 6{,}11\ cm$$

Tercer caso: Se conocen dos lados

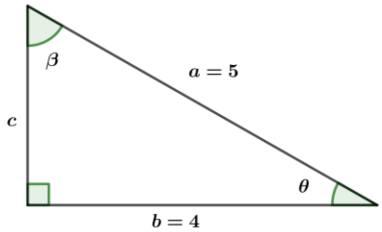
En este caso utilizaremos en primer lugar el teorema de Pitágoras para calcular el tercer lado, tanto si el que falta es un cateto como si es la hipotenusa. Siguiendo con el triángulo de la figura:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Para obtener los ángulos agudos, se debe utilizar una de sus razones trigonométricas que contenga los dos lados conocidos

Ejemplo

Determinar los ángulos β, θ, y el lado c del siguiente triángulo rectángulo



Solución

Se puede observar que el segmento $a = 5$ es la hipotenusa y que $b = 4$ es cateto opuesto a β y cateto adyacente a θ, además c es el otro cateto. Por el teorema de Pitágoras y la obtención del cateto sabemos que

$$c^2 = a^2 - b^2$$
$$c^2 = 5^2 - 4^2$$
$$c^2 = 25 - 16$$
$$c^2 = 9$$
$$c = \sqrt{9}$$
$$c = 3$$

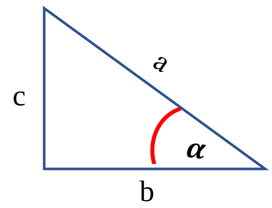
Luego

$$sen(\beta) = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{4}{5} \quad \Longrightarrow \quad \beta = arcsen\left(\frac{4}{5}\right) \quad \Longrightarrow \quad \beta = 53{,}13°$$

$$cos(\theta) = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{4}{5} \quad \Longrightarrow \quad \theta = arccos\left(\frac{4}{5}\right) \quad \Longrightarrow \quad \theta = 36{,}86°$$

V. Relación entre el seno y el coseno de un ángulo agudo

Si en un triángulo rectángulo se llama α a uno de sus ángulos agudos



La relación entre las medidas de los lados con el ángulo α permite establecer las siguientes igualdades:

$$sen \propto \ = \frac{c}{a} \qquad cos \propto \ = \frac{b}{a}$$

También se tiene la relación entre los lados, mediante el teorema de Pitágoras

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Despejando c y b se tiene:

$$sen\ \alpha = \frac{c}{a} \quad \Longrightarrow \quad c = a\ \text{sen}\,\alpha$$

$$cos\ \alpha = \frac{b}{a} \quad \Longrightarrow \quad b = a\,cos\,\alpha$$

Reemplazando en la fórmula del teorema de Pitágoras

$$a^2 = (a\,cos\,\alpha)^2 + (a\,sen\alpha)^2$$

Aplicando propiedad distributiva de la potenciación con respecto a la multiplicación se tiene:

$$a^2 = a^2(\cos\alpha)^2 + a^2(sen\ \alpha)^2$$

Sacando factor común en el segundo miembro

$$a^2 = a^2(cos^2\,\alpha + sen^2\,\alpha)$$

Para simplificar la escritura usualmente $(\cos\alpha)^2$ se escribe como $cos^2\ \alpha$

Si se dividen ambos miembros por a^2 se tiene:

$$\boxed{1 = cos^2\,\alpha + sen^2\alpha}$$

Esta igualdad se verifica para cualquier valor de α, es decir que para cualquier valor de α siempre se puede relacionar el valor de su seno y coseno

Esta Identidad Fundamental de la Trigonometría se denominada **Identidad Pitagórica** y establece que la suma de los cuadrados del seno y del coseno de un determinado ángulo es igual a 1

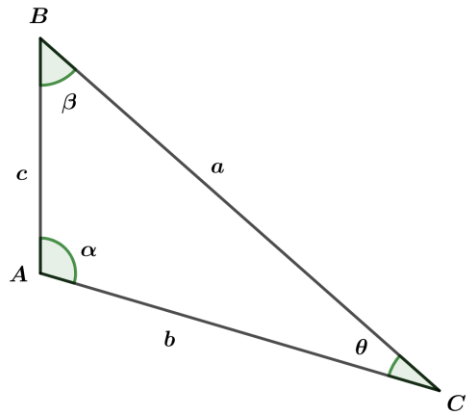
Donde a partir de esta última ecuación podemos establecer las siguientes relaciones:

$$\begin{cases} sen^2\alpha = 1 - cos^2\alpha \rightarrow sen\ \alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} \\ \cos^2\alpha = 1 - sen^2\alpha \ \rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1 - sen^2\alpha} \end{cases}$$

VI. Resolución de triángulos oblicuángulos

Las definiciones de seno, coseno y tangente que hemos aplicado en triángulos rectángulos no sepueden aplicar en triángulos no rectángulos. Para resolver triángulos no rectángulos se aplican dos teoremas muy importantes en trigonometría: el teorema de los senos y teorema del coseno.

Examinemos la siguiente figura, tenemos un triángulo ABC, cuyos ángulos son α, β, θ, y sus lados opuestos correspondientes BC (a), AC (b) y BA (c). Si se conoce un lado y otros dos elementos del triángulo se pueden determinar los tres elementos que restan.



Ley de los senos o Teorema de los Senos

¿Sabías qué en cada triángulo, el ángulo mayor tiene enfrente el lado mayor, el ángulo menor tiene enfrente el lado menor y si dos ángulos son iguales sus lados opuestos también lo son?

Una expresión cuantitativa de este hecho es el teorema de los senos que se enuncia así:

Los lados de un triángulo son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos

Suponga los ángulos α, β, θ, y los lados opuestos de longitud a, b, c, como muestra la figura anterior, entonces el enunciado se puede expresar mediante la siguiente fórmula:

$$\frac{a}{sen(\alpha)} = \frac{b}{sen(\beta)} = \frac{c}{sen(\theta)}$$

Aplicación

Se observa que el teorema de los senos da lugar a tres igualdades

$$\frac{a}{sen(\alpha)} = \frac{b}{sen(\beta)} \quad ; \quad \frac{a}{sen(\alpha)} = \frac{c}{sen(\theta)} \quad ; \quad \frac{b}{sen(\beta)} = \frac{c}{sen(\theta)}$$

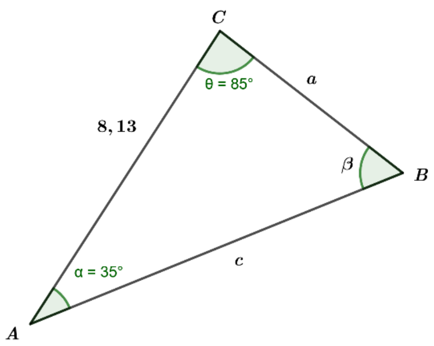
y sirve para relacionar dos lados de un triángulo con los ángulos opuestos. Por tanto, se podrá resolver con él cualquier triángulo del que conozcamos:

a) dos ángulos y un lado (recuerda qué si se conocen dos ángulos, se conocen los tres), o
b) dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos

Cuando al aplicar el teorema de los senos la incógnita es uno de los ángulos, puede haber dos soluciones, pues hay dos ángulos con el mismo seno, uno agudo y otro obtuso

Veamos dos ejemplos de aplicación:

Primer caso: Se conocen un lado y dos ángulos



Ejemplo 1:
Calcular los elementos desconocidos del siguiente triángulo

Solución
Se sabe que la suma de los ángulos interiores a un triángulo es de 180°,

$$\alpha + \beta + \theta = 180$$
$$35° + \beta + 85° = 180°$$
$$\beta = 180° - 35° - 85°$$
$$\beta = 60°$$

Luego

$$\frac{sen(35°)}{a} = \frac{sen(60°)}{8{,}13} = \frac{sen(85°)}{c}$$

Se toman de a dos las razones, pero se debe incluir aquella de la que se conocen los dos datos, en este caso la del medio

$$\frac{sen(35°)}{a} = \frac{sen(60°)}{8{,}13} \quad \Rightarrow \quad 8{,}13\, sen(35°) = a.sen(60°)$$

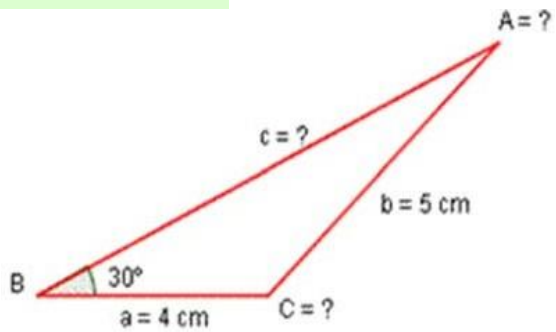
$$a = \frac{8{,}13 sen(35°)}{sen(60°)} \quad \Rightarrow \quad a = 5{,}38$$

$$\frac{sen(60°)}{8{,}13} = \frac{sen(85°)}{c} \quad \Rightarrow \quad c\,.sen(60°) = 8{,}13\, sen(85°)$$

$$c = \frac{8{,}13\, sen(85°)}{sen(60°)} \quad \Rightarrow \quad c = 9{,}35$$

Segundo caso: Se conocen dos lados y un ángulo opuesto a uno de ellos

Ejemplo 2:
Resolver el siguiente triángulo $\hat{B} = 30°$, $a = 4$ cm y $b = 5$ cm



Solución
Debemos elegir dos de las proporciones de manera que quede una igualdad con una sola incógnita

$$\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\hat{B}}$$

$$\frac{4}{sen\,\hat{A}} = \frac{5}{sen\,30°} \quad \Longrightarrow \quad sen\,\hat{A} = \frac{4\,.\;sen\,30°}{5}$$

$$sen\,\hat{A} = 0{,}4 \quad \Longrightarrow \quad \hat{A} = arc\;sen\;0{,}4 \quad \Longrightarrow \quad \hat{A} = 23°\,34'42"$$

Calculamos el ángulo $\hat{C}$

$$\hat{C} = 180° - (30° + 23°\,34'42") = 126°\,25'18"$$

Y falta calcular el lado c

$$\frac{b}{sen\hat{B}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}}$$

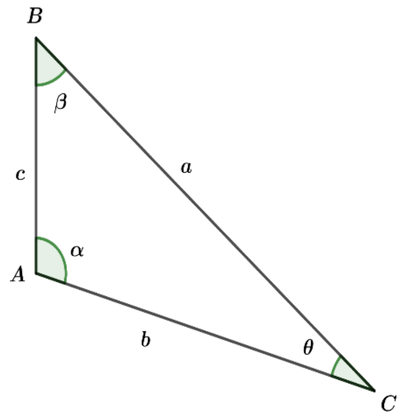
$$\frac{5}{sen\,30°} = \frac{c}{sen\,126°\,25'18"} \quad \Longrightarrow \quad c = \frac{5\,.\;sen\,126°\,25'18"}{sen\,30°} \quad \Longrightarrow \quad c = 8{,}05\;cm$$

En ocasiones, en los triángulos se conocen tres lados o dos lados y el ángulo comprendido entre ellos, en estos casos no se pueden usar la ley de los senos para calcular la primera incógnita, luego si es posible utilizar el teorema de los senos. Un método para resolver ese tipo de triángulos es a partir de la ley del coseno, y al igual que la ley de los senos, es válida para cualquier triángulo.

Teorema del Coseno

El cuadrado de un lado de un triángulo es igual a la suma del cuadrado de los otros dos lados, menos el doble del producto de dichos lados, por el coseno del ángulo que ellos forman.

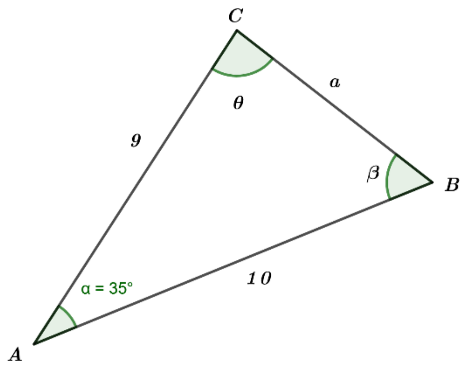
Si consideramos el siguiente triángulo, las expresiones matemáticas del teorema son las siguientes:



$a^2 = c^2 + b^2 - 2cb\,cos(\alpha)$ (el ángulo formado por c y b es α)
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\,cos(\theta)$ (el ángulo formado por a y b es θ)
$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\,cos(\beta)$ (el ángulo formado por a y c es β)

Primer caso: Se conocen dos lados y el ángulo que ellos forman

Ejemplo 1:
Calcular los ángulos θ y β y el segmento a del siguiente triángulo



Solución

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2cb\ cos(\alpha)$$

$$a^2 = 10^2 + 9^2 - 2\,.\,10\,.\,9.\,cos(35°)$$

$$a^2 = 100 + 81 - 180\ cos(35°)$$

$$a = \sqrt{100 + 81 - 180\ cos(35°)}$$

$$a = 5{,}8$$

Ahora sí, se puede continuar con el teorema de los senos, y es conveniente por su mayor facilidad de aplicación

$$\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\hat{B}}$$

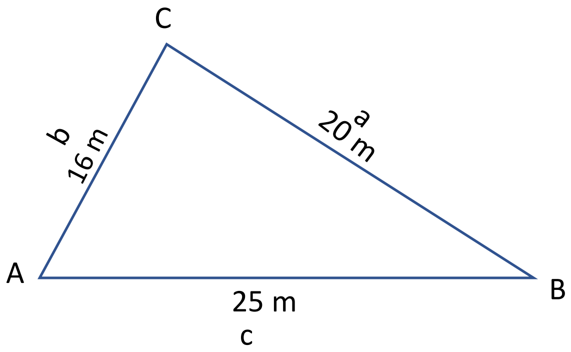
$$\frac{5{,}8}{sen\,35°} = \frac{9}{sen\,\hat{B}} \quad \Longrightarrow \quad sen\,\hat{B} = \frac{9.\ sen\,35°}{5{,}8} \quad \Longrightarrow \quad sen\,\hat{B} = 0{,}89 \quad \Longrightarrow \quad \hat{B} = arc\ sen\ 0{,}89$$

$$\hat{B} = 62°\ 52'\ 24"$$

$$\hat{C} = 180° - (35° + 62°\ 52'\ 24") \ = \ 82°\ 7'\ 36"$$

Segundo caso: Se conocen los tres lados

Ejemplo 2:
Resuelve el siguiente triángulo



$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B}$$
$$16^2 = 20^2 + 25^2 - 2.20.25\cos\hat{B}$$
$$256 = 400 + 625 - 1000\cos\hat{B}$$
$$256 - 400 - 625 = -1000\ cos\ \hat{B}$$
$$-769 = -1000\ \cos\hat{B}$$
$$-769 : (-1000) = cos\ \hat{B}$$
$$0{,}769 = cos\ \hat{B}$$
$$\hat{B} = arc\cos 0{,}769$$
$$\hat{B} = 39°\ 44'\ 9''$$

$$\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\hat{B}}$$

$$\frac{20}{sen\,\hat{A}} = \frac{16}{sen\,39°44'9"} \quad \Longrightarrow \quad sen\,\hat{A} = \frac{20.\ sen\,39°\ 44'9"}{16} \quad \Longrightarrow \quad \hat{A} = arc\ sen\ 0{,}852$$

$$\hat{A} = 58°\ 25'\ 48"$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$$

$$39°\ 44'\ 9" \ + \ 58°25'48" + \hat{C} = 180°$$

$$\hat{C} = 180° - 98°\ 9'\ 57"$$

$$\hat{C} = 81°\ 35'\ 3"$$

- Camuyrano, M. (Coord) (2005). *Matemática I, Modelos Matemáticos para interpretar la realidad*, Buenos Aires, Ángel Estrada y Cía, S.A.
- De Guzmán, M., Cólera, J. y Salvador, A. (1987), *Matemáticas, Bachillerato 1,* Barcelona, España, Grupo Anaya.
- De Guzmán, M., Cólera, J. y Salvador, A. (1987), *Matemáticas, Bachillerato 2,* Barcelona, España, Grupo Anaya.
- De Guzmán, M., Cólera, J. y Salvador, A. (1987), *Matemáticas, Bachillerato 3,* Barcelona, España, Grupo Anaya.
- Gómez Chacón,I. (2000). *Matemática Emocional*. *Los afectos en el aprendizaje matemático,* Madrid, España, Narcea S.A de Ediciones.
- Hohenwarter, M. (2018). *GeoGebra*. En https://www.geogebra.org/
- Kaczor, P. J. y otros. (Ed.) (1999), *Matemática I*, Buenos Aires, Argentina, Ediciones Santillana S.A.
- Maier, H. (1999). *El conflicto para los alumnos entre el lenguaje matemático y lenguaje común.* México. Grupo Editorial Iberoamericana, S.A. de C.V.
- Pérez, Martín M. (Ed.) (2012), *Matemática III*, Buenos Aires, Argentina, Ediciones Santillana S.A.
- Rojo, A. (2006). *Álgebra I,* Buenos Aires, Argentina, Editorial Magister Ecos SRL.
- Sadovsky, P.(2005), *Enseñar Matemática hoy, Miradas, sentidos y desafíos*, Buenos Aires, Argentina, Libros del Zorzal.
- Sadovsky, P., Melguizo, M. y Waldman, C. (1998), *Matemática 1*, Buenos Aires, Argentina, Ediciones Santillana S.A.
- Smith, S. y otros.(1992). *Álgebra y Trigonometría*, México, Addison Wesley Longman de México S.A.
- Spivak, L. (Ed.) (1999), *Matemática I*, Buenos Aires, Argentina, Ediciones Santillana S.A.